Nota: Con $\lfloor x \rfloor$ se indica la parte entera, es decir, el máximo de $\{n \in \mathbb{Z} : n \le x\}$. Por ejemplo, $\lfloor 2.8 \rfloor = 2$, $\lfloor 3 \rfloor = 3$, $\lfloor -1 \rfloor = -1$, $\lfloor -1.1 \rfloor = -2$.

1) Halla el mayor conjunto de números reales (el dominio) en que se pueden definir, como funciones reales, $f(x) = \sqrt{x - \lfloor x \rfloor - 1/2}$ y $g(x) = \exp(1/\cos x)$.

2) Halla la imagen de las funciones del ejercicio anterior indicando en cada caso su ínfimo.

3) Halla el dominio y la imagen de $f(x) = 1/\log(4x - 4x^2)$.

4) Se dice que $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ es *par* si $f(x) = f(-x)$ y que es *impar* si $f(x) = -f(-x)$. Estudia si el producto y la composición de funciones pares o impares es par o impar considerando todas las posibilidades.

5) Sean $f(x) = \tan x$ y $g(x) = \operatorname{arc\,sen} x$. Muestra que para $x \in (-1, 1)$ se tiene la igualdad $\big((f \circ g)(x)\big)^2 = x^2/(1 - x^2)$. Comprueba esta relación para algún valor no nulo de x en el que sepas calcular g.

6) Estudia si las siguientes funciones tienen límite cuando $x \to 1$.

$$f_1(x) = \frac{1-x}{|x-1|}, \qquad f_2(x) = \operatorname{sen}\big(\pi \lfloor (x-1)^{-1} \rfloor\big), \qquad f_3(x) = \frac{\log x}{2} \Big\lfloor \frac{4}{\log x} \Big\rfloor.$$

7) Busca dos funciones sencillas tales que no exista su límite cuando $x \to 0$, pero que exista el límite de su suma.

8) Manipulando la función exponencial, busca una función sencilla tal que su límite cuando $x \to +\infty$ sea 2 y cuando $x \to -\infty$ sea -1.

9) Calcula los siguientes límites laterales:

$$\lim_{x \to 0^-} e^{x^{-1} \cos x}, \qquad \lim_{x \to 1^+} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{2-x}}{|x-1|}, \qquad \lim_{x \to 1/2^+} \frac{|4x^2 - 4x + 1|}{2x^2 - 3x + 1}.$$

10) En el ejercicio anterior, calcula los límites laterales en la dirección opuesta, es decir, $x \to 0^-$, $x \to 1^-$ y $x \to 1/2^-$.

11) Estudia la continuidad de las funciones $f(x) = \operatorname{sen}\big(\pi x - \pi \lfloor x \rfloor\big)$ y $g(x) = \cos\big(\pi x - \pi \lfloor x \rfloor\big)$.

12) Estudia la continuidad de la siguiente función:

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\tan\left(\frac{1}{2}\pi \cos(\pi x)\right)} & \text{si } x \notin \mathbb{Z}, \\ 0 & \text{si } x \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

13) Calcula a y b para que la siguiente función definida a trozos sea continua:

$$f(x) = \begin{cases} 1/\log(x - x^2) & \text{si } x \in (0,1), \\ 1 + a\cos x & \text{si } x \leq 0, \\ b + 1 + be^x & \text{si } x \geq 1. \end{cases}$$

14) Demuestra que si $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ es continua y su imagen está en $[0,1]$, entonces tiene un punto fijo, es decir, existe $x_0 \in [0,1]$ con $f(x_0) = x_0$. Da un contraejemplo para f no continua. Indicación: Considera $g(x) = f(x) - x$ para la primera parte.

15) Demuestra que la ecuación $x - \operatorname{sen} x - 2 = 0$ tiene al menos una solución y halla una aproximación suya con una precisión de al menos una cifra decimal.

16) Encuentra una función $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ que no sea continua, pero que alcance todos los valores entre $f(0)$ y $f(1)$.