1) Considera las sucesiones $-\frac{1}{3}$, $\frac{2}{5}$, $-\frac{3}{7}$, $\frac{4}{9}$, $-\frac{5}{11}\dots$ y 2, 6, 12, 20, 30, 42… Busca fórmulas sencillas para el término general de cada una de ellas. La segunda está relacionada con los cuadrados.

2) Calcula el límite de $a_n = \big(n^2+(-2)^{-n}\big)/(n^2+7)$ y de $b_n = (3^n-4^n+5^n)/(3^n+4^n-5^n)$.

3) Estudia si $a_n = \big(1+\sqrt{2n^2+n}\big)/\sqrt{n^2+1}$ y $b_n = \sqrt{n^2-n+2023} - \sqrt{n^2-n+2022}$ son convergentes.

4) Sean $a_n = (n^3-n^2+1)^{2n}$ y $b_n = n^{6n}$. Calcula $\lim a_n/b_n$ y $\lim a_n^{1/n^2}$.

5) Halla los límites de las sucesiones complejas $a_n = \big((n^2+i)^3-n\big)/n^7$ y $b_n = \big(\frac{1+in}{n}\big)^{4n}$. Quizá prefieras escribir el paréntesis de la segunda como $i(1-i/n)$.

6) Sea a_n la suma de los n primeros cubos, esto es, $a_1 = 1^3$, $a_2 = 1^3+2^3$, $a_3 = 1^3+2^3+3^3$, $a_4 = 1^3+2^3+3^3+4^3$, etc. Calcula $\lim a_n/n^4$.

7) Busca un ejemplo de una fórmula sencilla para el término general de una sucesión $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ tal que $\inf\{a_n\} = -2$, $\sup\{a_n\} = 1$ y $\lim a_n = 0$.

8) Busca un ejemplo de una fórmula sencilla para el término general de una sucesión $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ tal que sea monótona decreciente y cumpla $\inf\{a_n\} = -2$ y $\sup\{a_n\} = 1$.

9) Sea a_n la sucesión definida por $a_1 = \lambda$, $a_{n+1} = 2a_n - 1$ para cierto $\lambda > 1$. Prueba por inducción que λ es una cota inferior y deduce que la sucesión es creciente.

10) Si a_n es como en el problema anterior, pero sin restricciones en λ, prueba por inducción que cualquiera que sea λ, incluso complejo, se cumple $a_n = 1 + (\lambda-1)2^{n-1}$.

11) Un algoritmo muy eficiente de origen antiquísimo para aproximar $\sqrt{2}$ consiste en considerar términos de la sucesión $a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + a_n^{-1}$ con $a_1 = 2$. Halla qué fracción es a_4 y comprueba con una calculadora que $a_4 - \sqrt{2}$ es pequeño (a_6 ya da 24 cifras correctas). Suponiendo que es convergente (véase el siguiente ejercicio), explica por qué $\lim a_n = \sqrt{2}$.

12) Para a_n como en el ejercicio anterior, comprueba que $a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n-\sqrt{2})^2/a_n + \sqrt{2}$ y demuestra que $\sqrt{2}$ es cota inferior. Explica también por qué es decreciente. En particular, al ser monótona y acotada, es convergente.

13) Si $0 \le a_n < 1$ y $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge, ¿es siempre cierto que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ converge? ¿Y que $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{a_n^2 + a_n}$ converge?

14) Estudia la convergencia de $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+(-1)^n}{2n^3-1}$ y de $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3+2(-1)^n}{n^2-(-1)^n}$.

15) Sea $a_n = (n+2i)/(n^2-i)$. Comprueba que la parte real de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ no converge, pero la parte imaginaria sí.

16) Halla todos los valores $\lambda \in \mathbb{R}$ para los que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n-2^{\lambda n}}{4^n+1}$ es convergente.

17) Sea $a_n = (n^2+1)^\lambda(1+\log n)$ con $\lambda \in \mathbb{R}$. Estudia la convergencia de $\sum_{n=1}^\infty a_n$ y de $\sum_{n=1}^\infty a_n^{-1}$ dependiendo del valor de λ.

18) Halla el menor $k \in \mathbb{N}$ tal que $\sum_{n=1}^\infty \left(\sqrt{n+2023}-\sqrt{n+1}\right)^k$ es convergente.

19) Recuerda la notación de los números combinatorios $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$. Estudia la convergencia de $\sum_{n=1}^\infty \binom{2n}{n}^{-1}$ y de $\sum_{n=1}^\infty \left(\binom{n}{2}+1\right)^{-1}$.

20) Con la notación del ejemplo anterior, prueba que $\sum_{n=1}^\infty 13^{-n}\binom{5n}{n}$ converge y, sin embargo, $\sum_{n=1}^\infty 12^{-n}\binom{5n}{n}$ diverge.

21) Estudia si las series $\sum_{n=1}^\infty \frac{(n+2)^{n+3}}{(2n+1)^n}$ y $\sum_{n=1}^\infty \frac{(n+1)^{n+1}}{(3^n+1)n^n}$ son convergentes.

22) Encuentra un ejemplo sencillo de dos series $\sum_{n=1}^\infty a_n$ y $\sum_{n=1}^\infty b_n$ tales que ninguna de ellas converja y $\sum_{n=1}^\infty (a_n+b_n)$ converja condicionalmente

23) Estudia la convergencia absoluta de $\sum_{n=1}^\infty (-1)^n \frac{1-(4/5)^n}{\sqrt[3]{n}}$ y de $\sum_{n=1}^\infty (-1)^n \frac{1+(4/5)^n}{1-(4/5)^n}$. ¿Es alguna de ellas condicionalmente convergente?

24) Estudia si las series complejas $\sum_{n=1}^\infty \frac{(3+4i)^n}{5^n+6}$ y $\sum_{n=1}^\infty \frac{2(3+8i)^n}{2(5+7i)^n+1}$ convergen absolutamente.