
Apellidos y nombre: ....

.... DNI (o pasaporte): ....

- Solo hay que entregar las dos hojas con las respuestas.
- A las 12:00 acaba el examen (se puede dar una pequeña extensión).

1) [2 puntos] Decide si la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{7^{2n}+2024}{n!}$ converge.

Apliquemos el criterio del cociente con $a_n = \frac{7^{2n}+2024}{n!}$. Usando $(n+1)! = (n+1)\,n!$ y $7^{2(n+1)} = 7^{2n}\cdot 7^2 = 49\cdot 7^{2n}$, se tiene

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(49\cdot 7^{2n}+2024)/((n+1)\,n!)}{(7^{2n}+2024)/n!} = \frac{49\cdot 7^{2n}+2024}{(n+1)(7^{2n}+2024)}.$$

Ahora dividimos numerador y denominador por 7^{2n} y usamos que $2024/7^{2n}\to 0$ para calcular el límite. Esto es,

$$\operatorname{lím}\frac{a_{n+1}}{a_n} = \operatorname{lím}\frac{49+2024/7^{2n}}{(n+1)(1+2024/7^{2n})} = \frac{49}{1}\operatorname{lím}\frac{1}{n+1} = 0.$$

La serie del enunciado converge, según el criterio del cociente, porque el límite es menor que 1.

---

2) [2 puntos] Calcula el valor exacto de $\dfrac{10}{1+3i} + \dfrac{8i+1}{2+3i} + \dfrac{1}{16}(1+i)^{10}$.

Calculemos cada sumando. El primero y el segundo son divisiones de números complejos que se efectúan convirtiendo su denominador en real multiplicando por el conjugado:

$$\frac{10}{1+3i} = \frac{10(1-3i)}{1^2+3^2} = 1-3i \quad \text{y} \quad \frac{8i+1}{2+3i} = \frac{(8i+1)(2-3i)}{2^2+3^2} = \frac{16i+24+2-3i}{13} = 2+i.$$

En el último sumando empleamos $1+i = re^{i\alpha}$ con $r = |1+i| = \sqrt{2}$ y $\alpha = \pi/4$ para obtener

$$\frac{1}{16}(1+i)^{10} = \frac{2^5 e^{5i\pi/2}}{16} = 2\,e^{2\pi i+\pi i/2} = 2\,e^{\pi i/2} = 2i.$$

Sumando los tres resultados, se concluye que la solución es $(1-3i)+(2+i)+2i = 3$.

---

3) [0.5 puntos por acierto, -0.25 fallo, 0 blanco] Indica si es verdadero o falso.

V. ■ F. □ La sucesión $a_n = \frac{n+1}{n}$ es monótona decreciente.

Se tiene $a_n = 1 + \frac{1}{n}$ y $\frac{1}{n}$ se hace cada vez más pequeño según crece n.

V. ■ F. □ Si a_n y b_n son convergentes, su suma también lo es.

La convergencia es la existencia del límite. Si $\lim a_n$ y $\lim b_n$ existen, por las propiedades de los límites, $\lim(a_n + b_n) = \lim a_n + \lim b_n$ también.

---

4) [2 puntos] Estudia la continuidad en $x = 2023$ y en $x = 2024$ de la siguiente función:

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\tan\left(\frac{1}{2}\pi\cos(\pi x)\right)} & \text{si } x \notin \mathbb{Z}, \\ 0 & \text{si } x \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

La función en ambos valores es nula porque son enteros. Por tanto, la continuidad en 2023 y 2024 equivale a que los límites

$$L_1 = \lim_{x\to 2023} e^{-\tan\left(\frac{1}{2}\pi\cos(\pi x)\right)} \qquad \text{y} \qquad L_2 = \lim_{x\to 2024} e^{-\tan\left(\frac{1}{2}\pi\cos(\pi x)\right)}$$

existan y sean nulos.

Si $x \to 2023$ entonces $\cos(\pi x) \to -1$ (porque 2023 es impar) y como $\cos(\pi x) \geq -1$ se tiene que $y = \cos(\pi x) \to -1^+$. Así pues,

$$\lim_{x\to 2023} \tan\left(\frac{1}{2}\pi\cos(\pi x)\right) = \lim_{y\to -1^+} \tan\left(\frac{1}{2}\pi y\right) = \lim_{y\to -1^+} \frac{\operatorname{sen}(\pi y/2)}{\cos(\pi y/2)} = -\infty$$

porque el numerador tiende a -1 y el denominador es 0^+. De esto se deduce $L_1 = e^{+\infty} = \infty$ y, por tanto, f no es continua en 2023.

Si $x \to 2024$ entonces $\cos(\pi x) \to 1$ (porque 2024 es impar) y como $\cos(\pi x) \leq 1$ se cumple que $y = \cos(\pi x) \to 1^-$. En este caso,

$$\lim_{x\to 2024} \tan\left(\frac{1}{2}\pi\cos(\pi x)\right) = \lim_{y\to 1^-} \tan\left(\frac{1}{2}\pi y\right) = \lim_{y\to 1^-} \frac{\operatorname{sen}(\pi y/2)}{\cos(\pi y/2)} = +\infty$$

porque el numerador tiende a 1 y el denominador es 0^+. Consecuentemente, $L_2 = e^{-\infty} = 0$ y, por tanto, f es continua en 2024.

---

5) [2 puntos] Calcula la derivada en $x = 0$ de $f(x) = (2x+1)^{\cos(2x)}$.

Por las propiedades de los logaritmos, $\log f(x) = \cos(2x)\,\log(2x+1)$. Derivando esta expresión con la regla del producto se obtiene

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = -2\,\mathrm{sen}(2x)\,\log(2x+1) + \frac{2}{2x+1}\cos(2x).$$

Sustituyendo $x = 0$ y usando $f(0) = (0+1)^1 = 1$, se concluye $f'(0) = 2$.

---

6) [0.5 puntos por acierto, -0.25 fallo, 0 blanco] Indica si es verdadero o falso.

V. ☐ F. ■ El área limitada entre las gráficas de $f(x) = 2x - x^2$ y $g(x) = x$ es $\frac{1}{3}$.
Las funciones coinciden en $x = 0$ y $x = 1$, que son los valores que resuelven $2x - x^2 = x$. Por tanto el área es $\int_0^1 |f-g| = \int_0^1 (x - x^2)\,dx = \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^1 = \frac{1}{6}$.

V. ☐ F. ■ El polinomio de Tayor de orden 3 de $\mathrm{sen}\,x$ alrededor de cero es $x - x^3$.
Para $f(x) = \mathrm{sen}\,x$ la derivada tercera es $f'''(x) = -\cos x$. Por tanto, el coeficiente de x^3 del polinomio de Taylor es $\frac{f'''(0)}{3\cdot 2\cdot 1} = -\frac{1}{6}$.
