**1)** Demuestra que el logaritmo decimal de un número racional positivo es o bien entero o bien irracional. Indicación: Intenta adaptar la prueba habitual de que $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

**2)** Demuestra que $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n n^{-1} 2023^{-n!}$ es irracional.

**3)** Explica por qué 0,1234567891011... no es un número decimal periódico (ni puro ni mixto) y concluye que es irracional. Aplica la misma estrategia para probar la irracionalidad de $\sum_{n=1}^{\infty} a_n 10^{-b_n}$ si $a_n$ y $b_n$ son sucesiones de enteros positivos con $a_n$ acotada y $b_{n+1} - b_n \to +\infty$.

**4)** Repite la primera parte del ejercicio anterior con 0,235711131719... formado concatenando los primos. Indicación: ¿Por qué el teorema de los números primos asegura que para $N$ grande hay números primos con exactamente $N$ cifras?

**5)** Sea $N \in \mathbb{Z}_{\geq 4}$ y sea $\mathcal{R}_N$ el conjunto de fracciones irreducibles $a/q$ con $1 \leq q \leq \sqrt{N}$. Prueba que $\bigcup_{a/q \in \mathcal{R}_N} \{x : |x - a/q| < (qN)^{-1}\}$ es una unión disjunta.

**6)** Considera la sucesión $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ con $a_n = \left(1 + \frac{3}{4}\sqrt{2}\right)(1+\sqrt{2})^n + \left(1 - \frac{3}{4}\sqrt{2}\right)(1-\sqrt{2})^n$. Demuestra que $a_n \in \mathbb{Z}^+$ y $\left|\sqrt{2} - 1 - a_n/a_{n+1}\right| < a_{n+1}^{-2}$. Indicación: Para deducir $a_n \in \mathbb{Z}^+$, establece una fórmula de recurrencia para $a_n$ o utiliza que $(1+\sqrt{2})^n - (1-\sqrt{2})^n$ es un múltiplo par de $\sqrt{2}$. Para la desigualdad, muestra que el valor absoluto es $(5\sqrt{2} - 7)(\sqrt{2} - 1)^n / a_{n+1}$.

**7)** Prueba que $\sum_{n=1}^{\infty} 2022^{-n^n}$ es trascendente.

**8)** Justifica la convergencia absoluta de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-5} \operatorname{cosec}(2\pi n \sqrt[3]{3})$, que se escapa de los criterios que has estudiado en las asignaturas de análisis. Indicación: Prueba primero $|\operatorname{sen}(\pi x)| \geq |x|$ para $|x| \leq 1/2$ y utiliza que $2\sqrt[3]{3}$ es algebraico de grado 3.

**9)** Demuestra que la parte fraccionaria de $n!e$ no está uniformemente distribuida.

**10)** Demuestra que la parte fraccionaria de $\log n$ con $n \in \mathbb{Z}^+$ no está uniformemente distribuida. Indicación: Aproxima cuántas veces la parte fraccionaria de $\log n$ es menor que $1/2$ para $n < e^N$.

**11)** El código ASCII asigna a cada entero en $[0, 256)$ un carácter alfanumérico (o de control). De este modo, podemos "leer" cada $0 < x < 1$ escribiéndolo en base 256. Así, el número $0{,}282950185472145\dots = \frac{72}{256} + \frac{111}{256^2} + \frac{108}{256^3} + \frac{97}{256^4} + \dots$ es `Hola...` porque $72 \to$ `H`, $111 \to$ `o`, $108 \to$ `l`, $97 \to$ `a`. Demuestra que existe $n \in \mathbb{Z}^+$ tal que la parte fraccionaria de $n\pi$ comienza con el texto completo de "El Quijote".

**12)** Si en el primer examen saco un $8|\operatorname{sen} 3|$, en el segundo un $8|\operatorname{sen} 6|$, en el tercero un $8|\operatorname{sen} 9|$ y así sucesivamente, ¿aprobaré si el número de exámenes es suficientemente grande?

**13)** Expresa con radicales las fracciones continuas $[\overline{2,3}]$ y $[1, 1, \overline{1,4}]$.

**14)** Halla la fracción continua de $(n + \sqrt{n^2+4})/2$ para $n \in \mathbb{Z}^+$.

**15)** Demuestra $\sqrt{n^2+1} = [n, \overline{2n}\,]$ y $\sqrt{n^2+n} = [n, \overline{2, 2n}\,]$.

**16)** Calcula la probabilidad de que un número real de $(0,1)$ tengan el cociente parcial $a_1$ de tres cifras.

**17)** Si $p_n/q_n$ son las convergentes de de un número irracional, prueba que para todo $n$ se cumple $p_n/q_n = a_0 + \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} (q_{k-1} q_k)^{-1}$. Indicación: Intenta reorganizar el sumatorio para obtener una suma telescópica.

**18)** Demuestra $p_n q_{n-2} - p_{n-2} q_n = (-1)^n a_n$ para $n \in \mathbb{Z}_{\geq 2}$. Considera el caso $\alpha = [\,\overline{3}\,]$ y deduce de ello que cumple $\sum_{k=1}^{\infty} (q_{2k+1} q_{2k-1})^{-1} = (10 - 3\alpha)/9$. Indicación: Divide la igualdad con $a_n = 3$ entre $q_n q_{n-2}$ y toma $n = 2k+1$.

**19)** Si $p_n/q_n$ son las convergentes de $\sqrt{2}$, demuestra por inducción usando las relaciones de recurrencia para $p_n$ y $q_n$ y la identidad del ejercicio anterior que $(x, y) = (p_n, q_n)$ es solución de $x^2 - 2y^2 = (-1)^{n+1}$.

**20)** Comprueba que si $(x, y) \in \mathbb{Z}^+ \times \mathbb{Z}^+$ es solución de $x^2 - Dy^2 = -1$ (con $D \in \mathbb{Z}^+$ no cuadrado) entonces $x' = x^2 + Dy^2$, $y' = 2xy$ lo es de $x^2 - Dy^2 = 1$. Halla una solución no trivial de la ecuación de Pell $x^2 - 97y^2 = 1$ sabiendo $\sqrt{97} = [9, \overline{1, 5, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 5, 1, 18}\,]$. Indicación: Usa una calculadora porque salen números grandes. Cambiando 97 por 2011 la menor solución tendría más de 40 cifras.

**21)** Arquímedes aproximó $\pi$ por $22/7$. Halla la fracción con denominador mínimo que mejora la aproximación de Arquímedes en valor absoluto.

**22)** Halla la fracción irreducible $a/q$ con $q < 1000$ que minimiza $|qe^2 - a|$.

**23)** Un año solar dura 365,24223379... días, pero el calendario oficial le asigna 365 días añadiendo 97 nuevos días cada 400 años, correspondientes a los bisiestos (uno cada cuatro años excepto en el año que precede a un siglo no múltiplo de 4). Mejora esta aproximación usando fracciones continuas.

**24)** Demuestra que si $(x, y) \in \mathbb{Z}^+ \times \mathbb{Z}^+$ es una solución de $x^3 - dy^3 = 1$ con $d \geq 5$ que no sea un cubo perfecto entonces $x/y$ es una convergente de $\sqrt[3]{d}$ y utiliza este hecho para hallar una solución no trivial de $x^3 - 635y^3 = 1$. Indicación: En $\mathbb{R}[x]$ se tiene $x^3 - a^3 = (x-a)(x^2 + ax + a^2)$.

**25)** Sea $\alpha = 2 + \sqrt{7}$. Calcula explícitamente (como irracionales cuadráticos) los $\alpha_j$ dados por el algoritmo $\alpha_{j+1} = 1/\mathrm{Frac}(\alpha_j)$ hasta que comiencen a repetirse.

**26)** Comprueba que $x = 3 + \sqrt{11}$ cumple $x = [6, 3, x]$ y deduce $\sqrt{11} = [3, \overline{3, 6}\,]$. Utilizando esta fracción continua, halla tres soluciones $(x, y) \in \mathbb{Z}^+ \times \mathbb{Z}^+$ de $x^2 - 11y^2 = 1$.

**27)** Comprueba que la aplicación lineal $(x, y) \mapsto (3x + 4y, 2x + 3y)$ deja invariante la ecuación de Pell $x^2 - 2y^2 = 1$ y úsala para demostrar que tiene infinitas soluciones sin apelar a la teoría de las fracciones continuas.

**28)** Demuestra por inducción que las convergentes de $\sqrt{2} = [1, \overline{2}\,]$ satisfacen $p_{n+1} = p_n + 2q_n$ y $q_{n+1} = p_n + q_n$ y deduce que la aplicación del problema anterior envía $(p_n, q_n)$ en $(p_{n+2}, q_{n+2})$.

**29)** Sean $p_n/q_n$ las convergentes de $\sqrt{3} = [1, \overline{1,2}\,]$. Encuentra una aplicación lineal tal que envíe $(p_1, q_1)$ a $(p_3, q_3)$ y $(p_3, q_3)$ a $(p_5, q_5)$. Comprueba deja invariante $x^2 - 3y^2 = 1$.

**30)** Haz una conjetura para la fracción continua de $\alpha = (e^2 + 1)/(e^2 - 1)$ (es difícil de probar) calcula numéricamente $|q_3\alpha - p_3|$ y comprueba que está entre $1/q_4$ y $1/q_5$.

**31)** La fracción continua de $\alpha = [\,\overline{1}\,]$ claramente tiene los $q_n$ con menor crecimiento y por tanto, en cierto sentido, se aproxima peor por racionales. Muestra que $\alpha$ es la razón áurea y relaciona $p_n/q_n$ con los números de Fibonacci.

**32)** Con la notación del problema anterior, calcula el límite de $q_n^2|\alpha - p_n/q_n|$.