1) Busca una función aritmética multiplicativa tal que su serie de Dirichlet no converja para ningún valor de $s \in \mathbb{C}$ y otra que converja para todo $s \in \mathbb{C}$.

2) Prueba $\sum_{n=1}^{\infty} |\mu(n)|/n^s = \zeta(s)/\zeta(2s)$ para $\Re(s) > 1$.

3) Se define la *función de Liouville* como la función completamente multiplicativa λ tal que $\lambda(p) = -1$. Expresa $D_\lambda(s)$ en términos de la función ζ y usa el resultado para hallar qué función aritmética f verifica $\lambda = \mu * f$.

4) Sea f una función completamente multiplicativa $f : \mathbb{Z}^+ \longrightarrow \{0, 1, -1\}$ y sea $c = 1 * f$. Demuestra que $c(p^\alpha) \geq 1$ si α es par y $c(p^\alpha) \geq 0$ si α es impar.

5) Escribe $\sum_{n=1}^{\infty} \sigma(n)/n^s$ en términos de la función ζ donde $\sigma(n)$ es la suma de los divisores de n.

6) Con lo que sabes de matemática discreta o de las asignaturas de análisis prueba que se tiene el desarrollo de Taylor $1^2 + 2^2 z + 3^2 z^2 + 4^2 z^3 + \cdots = (z+1)(1-z)^{-3}$ si $|z| < 1$ y utilízalo para obtener la igualdad $\sum_{n=1}^{\infty} \big(\tau(n)\big)^2/n^s = \zeta^4(s)/\zeta(2s)$.

7) Fijado $m \in \mathbb{Z}_{\geq 2}$, sea f la función aritmética tal que $f(n) = 1$ si $\gcd(n, m) = 1$ y $f(n) = 0$ en otro caso. Demuestra la igualdad $D_g(s) = \prod_{p|m}(1 - p^{-s})$ para $g = f * \mu$.

8) Originalmente Möbius enunció su fórmula de inversión de un modo más analítico afirmando que para funciones reales $f : [1, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ se cumple $f(x) = \sum_{n \leq x} \mu(n) F(x/n)$ con $F(x) = \sum_{n \leq x} f(x/n)$, donde $n \in \mathbb{Z}^+$. Demuestra esta variante. Indicación: Recuerda que $\sum_{d|n} \mu(d)$ se anula para $n > 1$.

9) Sea $f(n) = |\mu(n)|/\varphi(n)$. Expresa $n^{-1} \sum_{d|n} f(d)$ en términos de la función φ.

10) Prueba que $\sum_{d|n} \tau(d^2) = \big(\tau(n)\big)^2$. Indicación: Muestra primero que ambas funciones son multiplicativas.

11) Calcula la suma de $\varphi(d)/d$ sobre los divisores de un millón.

12) Prueba $\sum_{d^2|n} \mu(d) = |\mu(n)|$. Indicación: Explica primero por qué es multiplicativa la función $f(n) = \mu(\sqrt{n})$ para n cuadrado perfecto y $f(n) = 0$ en otro caso.

13) Demuestra que $\mu(n)$ es igual a la *suma de Ramanujan* $S(n) = \sum_{k \in R_n} e^{2\pi i k/n}$ donde $R_n = \{1 \leq k \leq n : \gcd(k, n) = 1\}$. Indicación: Muestra primero que S es multiplicativa apelando al teorema chino del resto. Después usa que $S(p^\alpha)$ es la suma de las raíces p^α-ésimas de la unidad menos la suma de las $p^{\alpha-1}$-ésimas.

14) Halla una fórmula explícita para $\sum_{d|n} d|\mu(d)|$ en términos de la factorización de n.

15) Dados $a, n \in \mathbb{Z}^+$ coprimos demuestra que n divide a $\sum_{d|n} a^d \mu(n/d)$. Indicación: Estudia primero el caso $n = p^\alpha$. Aunque la función no es multiplicativa, justifica que puedes proceder por inducción en el número de potencias primas en la factorización de n gracias a que para $n = mp^\alpha$ con $p \nmid m$ la suma es $\sum_{d_1|m}\sum_{d_2|p^\alpha} a^{d_1d_2}\mu(m/d_1)\mu(p^\alpha/d_2)$.

16) Demuestra que si $|z| < 1$ se tiene $\sum_{n=1}^{\infty}\mu(n)z^n(1-z^n)^{-1} = z$. Indicación: Usa el desarrollo de Taylor de $z^n(1-z^n)^{-1}$.

17) Demuestra que si $|z| < 1$ se tiene $\sum_{n=1}^{\infty}\varphi(n)z^n(1-z^n)^{-1} = z(1-z)^{-2}$. Indicación: Sigue la indicación anterior.

18) Calcula una fórmula asintótica para $\sum_{n=1}^{N}\varphi(n)$.

19) Calcula el límte de $N^{-2}\sum_{n=1}^{N}\sigma(n)$ cuando $N\to\infty$ donde σ es como en un problema anterior.

20) Prueba que $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}\lambda(n)\log n$ tiende a $-\pi^2/6$ cuando $s\to 1^+$ donde λ es la función de Liouville definida en otro problema. Indicación: Calcula la derivada de D_λ usando su expresión en términos de la función ζ.

21) Escribe $\int_1^\infty x^{-1-s}(\mathrm{Frac}(x)-1/2)\,dx$ en términos de la función ζ y sabiendo que esta integral converge cuando $s\to 0$, deduce $\zeta(0^+) = -1/2$.

22) Sea $\ell = \lim_{s\to 1}\big(\zeta(s)-(s-1)^{-1}\big)$. Demuestra que $\ell = 1 + \int_1^\infty \big(x^{-2}\lfloor x\rfloor - x^{-1}\big)\ dx$. Escribe la integral como $\lim_{N\to\infty}\int_1^N$ y calcula explícitamente la integral para deducir que ℓ es igual a la constante de Euler-Mascheroni.

23) Sea $L(s) = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}n^{-s}$. Prueba $L(s) = \big(1-2^{1-s}\big)\zeta(s)$ para $\Re(s) > 1$ y deduce a partir de ello $\zeta(\sigma)(\sigma-1)\to 1$ para $\sigma\to 1^+$ sin usar la representación integral de ζ.

24) Dando por supuesto el teorema de los números primos halla una fórmula asintótica para la suma de los N primeros primos. Indicación: Seguramente sepas calcular explícitamente la integral de $x\log x$.

25) Se sabe que $R(n) = \#\{(a,b)\in\mathbb{Z}_{\ge 0}\times\mathbb{Z}^+ : a^2+b^2 = n\}$ es igual a la suma de $(-1)^{(d-1)/2}$ sobre los divisores impares d de n. Dando esto por supuesto, demuestra que $D_R(s) = \zeta(s)L(s,\chi)$ donde χ es el único carácter $\chi\ne\chi_0$ módulo 4.

26) Dado $q\in\mathbb{Z}_{\ge 2}$, si f es una función aritmética tal que $f(n) = 0$ cuando n y q no son coprimos, demuestra la igualdad $\sum_\chi \big|\sum_{n=1}^{q} f(n)\chi(n)\big|^2 = \varphi(q)\sum_{n=1}^{q}|f(n)|^2$ donde χ recorre los caracteres módulo q. Indica cómo habría que modificar el segundo miembro si no se impone ninguna condición sobre f.