Enunciados y soluciones

1) [2 puntos] Expresa $\sum_{n=1}^{\infty} \varphi(n)/n^s$ en términos de la función ζ.

Vimos en clase que $\varphi = \mu * \mathrm{id}$ (porque las funciones μ e id son multiplicativas y $\varphi(p^\alpha) = p^\alpha - p^{\alpha-1} = \sum_{d\mid p^\alpha} \mu(d)p^\alpha/d$). Por las propiedades de la convolución, $D_\varphi(s) = D_\mu(s)D_{\mathrm{id}}(s)$ y se tiene:

$$D_\mu(s) = \prod_p \left(1 - p^{-s}\right) = \frac{1}{\prod_p \left(1 - p^{-s}\right)^{-1}} = \frac{1}{\zeta(s)}, \qquad D_{\mathrm{id}}(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^s} = \zeta(s-1).$$

Así pues, $\sum_{n=1}^{\infty} \varphi(n)/n^s = \zeta(s-1)/\zeta(s)$. La convergencia (que no se pedía en el enunciado) está asegurada en $\Re(s) > 2$ porque $D_\mu(s)$ y $D_{\mathrm{id}}(s)$ convergen en dicha región.

---

2) [2 puntos] Prueba que todos los primos $p > 2$ que dividen a $9n^2 + 6n + 4$ para $n \in \mathbb{Z}^+$ cumplen $3 \mid p - 1$.

Se tiene $9n^2 + 6n + 4 = (3n+1)^2 + 3$ que es congruente con 1 módulo 3 y por tanto no es divisible por $p = 3$. Para $p > 3$, con el cambio $x = 3n + 1$ la condición de divisibilidad equivale a $x^2 \equiv -3 \ (p)$, esto es, $\left(\frac{-3}{p}\right) = 1$. Se cumple

$$\left(\frac{-3}{p}\right) = \left(\frac{-1}{p}\right)\left(\frac{3}{p}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{2}}\left(\frac{3}{p}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{2}}(-1)^{1\cdot\frac{p-1}{2}}\left(\frac{p}{3}\right) = \left(\frac{p}{3}\right).$$

Las tres primeras igualdades están justificadas, respectivamente, por la multiplicatividad del símbolo de Legendre, la primera ley suplementaria y la ley de reciprocidad cuadrática con $q = 3$. La última igualdad se sigue porque p es impar.

El único residuo cuadrático módulo 3 es $1^2 = 1$ así que $\left(\frac{-3}{p}\right) = 1$ si y solo si $p \equiv 1 \ (3)$.

---

3) [2 puntos] Calcula la fracción continua de $\sqrt{n^2 + n + \frac{1}{2}}$ para $n \in \mathbb{Z}^+$ arbitrario.

Sea α la expresión del enunciado. Se verifica $n^2 < \alpha^2 < n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2$ por tanto $\lfloor \alpha \rfloor = n$, esto es, $a_0 = n$. Con la notación habitual,

$$\alpha_1 = \frac{1}{\alpha - n} = \frac{\alpha + n}{\alpha^2 - n^2} = \frac{\alpha + n}{n + 1/2} \stackrel{n<\alpha<n+1}{\Longrightarrow} 1 < \frac{2n}{n+1/2} < \alpha_1 < \frac{2n+1}{n+1/2} = 2 \ \Rightarrow\ a_1 = 1.$$

El siguiente paso es

$$\alpha_2 = \frac{1}{(\alpha+n)/(n+1/2)-1} = \frac{n+1/2}{\alpha-1/2} = \frac{(n+1/2)(\alpha+1/2)}{(n+1/2)^2} = \frac{\alpha+1/2}{n+1/2}.$$

De nuevo, $n<\alpha<n+1$ implica $1<\alpha_2<(n+3/2)/(n+1/2)<2$ y $a_2=1$. Finalmente,

$$\alpha_3 = \frac{1}{(\alpha+1/2)/(n+1/2)-1} = \frac{n+1/2}{\alpha-n} = \alpha+n,$$

con lo que hemos probado $\alpha=[n,1,1,n+\alpha]$. De aquí, $\alpha=[n,1,1,2n,1,1,n+\alpha]$ e inductivamente $\alpha=[n,\overline{1,1,2n}\,]$.

---

4) [2 puntos] Prueba que las convergentes p_n/q_n de $\sqrt{2}=[1,\overline{2}\,]$ verifican $p_{n+1}=p_n+2q_n$ y $q_{n+1}=p_n+q_n$ para $n\in\mathbb{Z}_{\ge 0}$.

Se cumple $p_0/q_0=1/1$, $p_1/q_1=1+1/2=3/2$ y, por el algoritmo de la fracción continua, se deducen las recurrencias

$$p_{n+1}=2p_n+p_{n-1} \qquad \text{y} \qquad q_{n+1}=2q_n+q_{n-1}.$$

Procedemos por inducción. Para $n=0$ el resultado se deduce de los valores especiales antes indicados. Si lo suponemos probado hasta cierto n, utilizando las recurrencias anteriores,

$$p_{n+1}+2q_{n+1}=(2p_n+p_{n-1})+2(2q_n+q_{n-1})=2(p_n+2q_n)+(p_{n-1}+2q_{n-1})=2p_{n+1}+p_n=p_{n+2}.$$

En la penúltima igualdad se ha usado la hipótesis de inducción. De la misma forma,

$$p_{n+1}+q_{n+1}=(2p_n+p_{n-1})+(2q_n+q_{n-1})=2(p_n+q_n)+(p_{n-1}+q_{n-1})=2q_{n+1}+q_n=q_{n+2}.$$

Con esto concluye la prueba por inducción.

---

5) [1 punto] Para $n\in\mathbb{Z}^+$, demuestra la fórmula

$$\sum_{k\mid 210}\mu(k)\Big\lfloor\frac{n}{k}\Big\rfloor = \#\{1\le k\le n \,:\, \gcd(k,210)=1\}$$

donde $\lfloor x\rfloor$ indica la parte entera de x.

Sabemos que $\sum_{d|n} \mu(d)$ se anula para $n \in \mathbb{Z}_{>1}$ y vale 1 para $n = 1$. Por tanto, el cardinal del enunciado es

$$\sum_{k=1}^{n} \sum_{d|\gcd(k,210)} \mu(d) \underset{k=d\ell}{=} \sum_{d|210} \mu(d) \sum_{\ell\,:\,1\le d\ell\le n} 1 = \sum_{d|210} \mu(d) \sum_{1\le \ell\le \frac{n}{d}} 1 = \sum_{d|210} \mu(d) \Big\lfloor \frac{n}{d} \Big\rfloor.$$

---

6) [1 punto] Encuentra una matriz de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ que muestre que $5x^2 - 34xy + 58y^2$ es equivalente a $x^2 + y^2$.

Se tiene $a = 5$, $b = -34$ y $c = 58$, así que en el primer paso del algoritmo de reducción, $\langle b/(2a) \rangle = -3$ y el cambio es

$$\begin{aligned} x &\mapsto -3x + y \\ y &\mapsto -x \end{aligned} \qquad \text{que corresponde a} \qquad M_1 = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Operando, $5(y - 3x)^2 + 34(y - 3x)x + 58x^2 = x^2 + 4xy + 5y^2$. Ahora $a = 1$, $b = 4$ y $c = 5$, con lo que $\langle b/(2a) \rangle$ es 2 y lleva al cambio

$$\begin{aligned} x &\mapsto 2x + y \\ y &\mapsto -x \end{aligned} \qquad \text{cuya matriz es} \qquad M_2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Un cálculo prueba $(2x + y)^2 - 4(2x + y)x + 5x^2 = x^2 + y^2$ y la matriz buscada es

$$M_1 M_2 = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 & -3 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Cambiar todos los signos también es válido porque M y $-M$ actúan igual sobre cualquier forma cuadrática.

Criterios de corrección

Es imposible ser totalmente exhaustivo con todos los casos que aparecen en los exámenes, además ocasionalmente relajo o endurezco ligerísimamente los criterios dependiendo del aspecto global del examen. Solo se indican las bonificaciones y penalizaciones genéricas.

1) Llegar a lo más a un producto de sumas infinitas cuenta a lo más 0,5. Con una expresión simplificada en forma de producto infinito, pero sin llegar a conseguir la relación con ζ, se llega hasta 1.

2) Olvidarse de discutir el caso $p = 3$ descuenta 0,25. Algunos intentáis un argumento basado solo en congruencias módulo 3 sin la ley de reciprocidad cuadrática. Esto no es posible porque un primo de la forma $3k+2$ puede dividir a un número de la forma $3\ell+1$. Por ejemplo, 5 divide a 55.

3) En términos generales cada error en uno de los cuatro cocientes parciales descuenta 0,5. Un comentario (no relacionado con ninguna penalización): en clase solo mencionamos (y en parte probamos) la estructura de la fracción continua de $\sqrt{D}$ para D entero, aquí no lo es. Lo digo porque algunos mencionáis que el resultado corrobora lo visto en clase.

4) Prácticamente aquí solo he puesto ceros y unos porque casi todos los que habéis dado con un método válido de demostración lo habéis concluido. Los dos métodos más usados han sido el principio de inclusión-exclusión e inducción. A mí me parece más natural, de acuerdo con lo visto en el curso, el que he escrito en la solución, además de que es muy breve. El número 210 es irrelevante, el único propósito de tomar un valor concreto era hacer más sencillo el ejercicio.

5) Cada error de cuentas penaliza 0,25, lo mismo que confundir el orden de las matrices o algún signo.