Demostración. La implicación directa se sigue de la Proposición 3.1.14 tomando partes reales e imaginarias puesto que las integrales $\int_0^1 \cos(2\pi kx)\,dx$ y $\int_0^1 \operatorname{sen}(2\pi kx)\,dx$ son nulas si $k \neq 0$.

Para el recíproco empleamos el teorema de Fejér [14, §1.4] que implica que cualquier función $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ continua se aproxima uniformemente por funciones reales que son series de Fourier finitas. Es decir, para cada $\epsilon > 0$ existe $F(x) = \sum_{k=-K}^{K} c_k e^{2\pi ikx}$ tal que $|f - F| < \epsilon$. Por la hipótesis,

$$\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} F(a_n) \xrightarrow[N\to\infty]{} c_0 = \int_0^1 F.$$

De $|f - F| < \epsilon$, y por tanto $\left|\int_0^1 f - \int_0^1 F\right| < \epsilon$, se deduce que lo mismo es válido al reemplazar F por f, porque ϵ es tan pequeño como queramos. □

Demostración del Teorema 3.1.15. Por la 1-periodicidad de $e^{2\pi ix}$ y la fórmula para la suma de una progresión geométrica,

$$\sum_{n=1}^{N} e^{2\pi ik\mathrm{Frac}(n\alpha)} = \sum_{n=1}^{N} e^{2\pi ikn\alpha} = \frac{e^{2\pi ik(N+1)\alpha} - e^{2\pi ik\alpha}}{e^{2\pi ik\alpha} - 1}.$$

Fijado $k \in \mathbb{Z} - \{0\}$ el denominador es constante y no nulo (porque $\alpha \notin \mathbb{Q}$) y el módulo del numerador es a lo más 2. Entonces, al dividir entre N el resultado tiene a cero y el enunciado se deduce de la Proposición 3.1.16. □

3.2. Fracciones continuas

Notación básica. Fracciones continuas infinitas. Fracciones continuas periódicas.

Recordemos que una fracción continua finita era una expresión de la forma

$$a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{\ddots\, a_{k-1} + \cfrac{1}{a_k}}}} \qquad \text{con} \quad a_0 \in \mathbb{Z} \quad \text{y} \quad a_j \in \mathbb{Z}^+,\ j \neq 0.$$

La notación moderna abrevia esta expresión tan complicada desde el punto de vista tipográfico mediante $[a_0, a_1, \ldots, a_k]$.

Por el Teorema 1.1.9 sabíamos que toda fracción irreducible se expresaba como una fracción continua finita. Simplemente había que tomar $a_j = c_j$

con c_j los cocientes en el algoritmo de Euclides aplicados al numerador y el denominador. Por ejemplo,

$$\left.\begin{aligned} 27 &= \mathbf{2}\cdot 10+7\\ 10 &= \mathbf{1}\cdot 7+3\\ 7 &= \mathbf{2}\cdot 3+1\\ 3 &= \mathbf{3}\cdot 1+0 \end{aligned}\right\} \quad\Longrightarrow\quad \frac{27}{10}=[2,1,2,3].$$

Para el proceso contrario, partir de la fracción continua y hallar el número racional correspondiente, se aplicaba lo que habíamos llamado el algoritmo de la fracción continua. En el ejemplo anterior,

$$\begin{array}{cccccc} & & 2 & 1 & 2 & 3 \\ \hline 0 & 1 & 2 & 3 & 8 & 27 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 3 & 10 \\ \hline \end{array} \quad\Longrightarrow\quad [2,1,2,3]=\frac{27}{10}.$$

Numeraremos los términos que aparecen en este algoritmo de la siguiente forma:

$$\begin{array}{cccccccc} & & a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_k & \\ \hline 0 & 1 & p_0 & p_1 & p_2 & \dots & p_{k-1} & p_k \\ 1 & 0 & q_0 & q_1 & q_2 & \dots & q_{k-1} & q_k \\ \hline \end{array}$$

A veces también se define $p_{-1}=1$, $q_{-1}=0$. Se dice que p_n/q_n son las *convergentes* de la fracción continua y que los a_j son los *cocientes parciales*. La razón de este último nombre es natural recordando el algoritmo de Euclides y en breve veremos la razón para el primero. Cuando se empieza a numerar en -1, formalmente $p_{-1}/q_{-1}=\infty$, lo cual en ciertas ocasiones resulta natural.

Gracias al Lema 1.1.4, también sabíamos que

$$A_n=\begin{pmatrix} a_0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_1 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\cdots\begin{pmatrix} a_n & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} p_n & p_{n-1}\\ q_n & q_{n-1}\end{pmatrix}.$$

Una consecuencia inmediata que ya habíamos explotado para resolver ecuaciones diofánticas lineales (Proposición 1.1.5) es:

Proposición 3.2.1. *Las convergentes verifican* $p_nq_{n-1}-q_np_{n-1}=(-1)^{n+1}$.

Corolario 3.2.2. *Las convergentes* $\{p_n/q_n\}_{n=1}^{\infty}$ *son fracciones irreducibles.*

Se definen las fracciones continuas infinitas $[a_0,a_1,a_2,\dots]$ como límites de la sucesión de fracciones continuas finitas $[a_0]$, $[a_0,a_1]$, $[a_0,a_1,a_2]\dots$ Al igual que las fracciones continuas finitas están asociadas a los números racionales, las infinitas lo están a los irracionales, lo que lleva al problema previo de justificar la convergencia. Es decir, a mostrar que las convergentes hacen honor a su nombre y conforman una sucesión convergente. Por otra parte, dado un irracional, hay que obtener un sustituto del algoritmo de Euclides para hallar su fracción continua. Toda la información está contenida en los dos resultados siguientes:

Proposición 3.2.3. *Para cualquier sucesión* $\{a_j\}_{j=0}^{\infty}$ *con* $a_0 \in \mathbb{Z}$ *y* $a_j \in \mathbb{Z}^+$, $j \neq 0$, *la fracción continua infinita* $[a_0, a_1, a_2, \dots]$ *converge a un número irracional.*

► **Proposición 3.2.4.** *Sea* $\alpha \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$, *entonces* $\alpha = [a_0, a_1, a_2, a_3, \dots]$ *con* $a_j = \lfloor \alpha_j \rfloor$ *donde* α_j *responde a la recurrencia* $\alpha_{j+1} = 1/\mathrm{Frac}(\alpha_j)$, $\alpha_0 = \alpha$.

Es fácil ver inductivamente que hay una correspondencia biyectiva entre $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$ y las fracciones continuas infinitas. Dado α, a_0 está determinado por la parte entera de α, a_1 por la de α_1, etc.

Introduciremos como resultado auxiliar una justificación de que el algoritmo de la fracción continua es todavía válido si permitimos que el último cociente parcial no sea necesariamente entero.

Lema 3.2.5. *Si a la fracción continua* $[a_0, a_1, \dots, a_n]$ *le asociamos la función* $f : [1, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ *dada por* $f(x) = [a_0, a_1, \dots, a_n, x]$, *se tiene*

$$f(x) = \frac{p_n x + p_{n-1}}{q_n x + q_{n-1}} = \frac{p_n}{q_n} + \frac{(-1)^n}{q_n(q_n x + q_{n-1})}.$$

Demostración. La primera igualdad se sigue por inducción en n, ya que el resultado es cierto para $n = 1$ (o $n = 0$ si se admite p_{-1} y q_{-1}) y si lo damos por cierto para $n - 1$, el resultado se sigue aplicando la hipótesis de inducción a $f(x) = [a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, a_n + x^{-1}]$.

La segunda igualdad es consecuencia de la Proposición 3.2.1 sin más que operar un poco. □

Demostración de la Proposición 3.2.3. Por las igualdades del Lema 3.2.5, la función f es decreciente si n par. En este caso, $p_{n+2}/q_{n+2} = f(a_{n+1}+1/a_{n+2})$ es mayor que $f(\infty) = p_n/q_n$. De la misma forma, para n impar es creciente y se cumple la desigualdad contraria. Entonces

$$\frac{p_0}{q_0} < \frac{p_2}{q_2} < \dots < \frac{p_{2n-2}}{q_{2n-2}} < \frac{p_{2n}}{q_{2n}} \quad \text{y} \quad \frac{p_{2n+1}}{q_{2n+1}} < \frac{p_{2n-1}}{q_{2n-1}} < \dots < \frac{p_3}{q_3} < \frac{p_1}{q_1}.$$

Además, por la Proposición 3.2.1, $0 < p_{2n-1}/q_{2n-1} - p_{2n}/q_{2n} = 1/(q_{2n}q_{2n-1})$ que tiende a cero porque q_k es una sucesión de enteros positivos estrictamente creciente. se concluye que $\{p_n/q_n\}_{n=0}^{\infty}$ es siempre convergente.

Por otro lado, si α es el límite, $0 < \alpha - p_{2n}/q_{2n} < 1/(q_{2n}q_{2n-1})$, según lo anterior. En particular, $|q_{2n}\alpha - p_{2n}| \to 0$ y la irracionalidad de α es consecuencia del Lema 3.1.3. □

Demostración de la Proposición 3.2.4. Se cumple $\alpha_0 = [a_0, \alpha_1]$ y, en general, $\alpha_j = [a_j, \alpha_{j+1}]$. Inductivamente se obtiene $\alpha = [a_0, a_1, \dots, a_n, \alpha_{n+1}]$. Con la notación del Lema 3.2.5, $\alpha = f(\alpha_{n+1})$ y $f(\alpha_{n+1}) - p_n/q_n \to 0$ porque $q_n \to \infty$. □

Si experimentamos un poco con algunos números destacados, en general no se ven patrones en los cocientes parciales. Solo una tendencia a que tengan tamaño pequeño, aunque a la larga aparezcan valores grandes. En este sentido, un teorema de A.Y. Khinchin [35] [32] asegura que para cada casi todo número real, en el sentido de la medida, la media geométrica de los cocientes parciales tiende a cierta constante que es alrededor de 2,685 mientras que su media aritmética tiende lentamente a infinito.

	Cocientes parciales	Convergentes
π	$3, 7, 15, 1, 292, 1, 1$	$3, \frac{22}{7}, \frac{333}{106}, \frac{355}{113}, \frac{103993}{33102}, \frac{104348}{33215}, \frac{208341}{66317}$
$\log 2$	$0, 1, 2, 3, 1, 6, 3, 1, 1, 2$	$0, 1, \frac{2}{3}, \frac{7}{10}, \frac{9}{13}, \frac{61}{88}, \frac{192}{277}, \frac{253}{365}, \frac{445}{642}, \frac{1143}{1649}$
$\sqrt[3]{2}$	$1, 3, 1, 5, 1, 1, 4, 1, 1, 8$	$1, \frac{4}{3}, \frac{5}{4}, \frac{29}{23}, \frac{34}{27}, \frac{63}{50}, \frac{286}{227}, \frac{349}{277}, \frac{635}{504}, \frac{5429}{4309}$
$\cos 1$	$0, 1, 1, 5, 1, 2, 2, 1, 2, 1$	$0, 1, \frac{1}{2}, \frac{6}{11}, \frac{7}{13}, \frac{20}{37}, \frac{47}{87}, \frac{67}{124}, \frac{181}{335}, \frac{248}{459}$
$\sqrt{2}+\sqrt{3}$	$3, 6, 1, 5, 7, 1, 1, 4, 1$	$3, \frac{19}{6}, \frac{22}{7}, \frac{129}{41}, \frac{925}{294}, \frac{1054}{335}, \frac{1979}{629}, \frac{8970}{2851}, \frac{10949}{3480}$

Sin embargo, en algunas ocasiones aparecen patrones muy claros. Un ejemplo muy notable es el número e. Euler demostró

$$e = [2, 1, 2, 1, 1, 4, 1, 1, 6, 1, 1, 8, 1, 1, 10, 1, 1, 12, 1, 1, 14, 1, \dots].$$

Es decir, $a_{3n-1} = 2n$ y el resto de los a_j es 1 excepto $a_0 = 2$. La prueba no es sencilla y no la incluiremos aquí. En [10] hay una demostración reciente fácil de seguir, aunque extraña, que tiene ciertas similitudes con la que vimos para el Teorema 3.1.5. El autor pone cierto esfuerzo en explicar parcialmente la motivación. En [61] hay pruebas de otras fracciones continuas relacionadas de una manera u otra con el número e, a veces de forma indirecta, como la de $\tan 1 = i(e^{-i} - e^{i})/(e^{i} + e^{-i})$ que está compuesta por los impares precedidos por unos, esto es, $[1, 1, 1, 3, 1, 5, 1, 7, \dots]$.

Mucho más asequible, y también clásica, es la clase de los algebraicos de grado 2. Para motivar el resultado, veamos primero algunos ejemplos.

Para $\alpha = \sqrt{5}$ se tiene

$$\alpha_0 = \sqrt{5} \xrightarrow[a_0=2]{} \alpha_1 = \frac{1}{\sqrt{5}-2} = 2 + \sqrt{5} \xrightarrow[a_1=4]{} \alpha_2 = \frac{1}{\sqrt{5}-2} \xrightarrow[a_2=4]{} \dots$$

Por tanto $\sqrt{5} = [2, 4, 4, 4, \dots]$.

Unos cálculos más largos llevan a

$$\frac{4+\sqrt{6}}{5} = [1, 3, 2, 4, 2, 4, 2, 4, 2, 4, 2, 4, 2, 4, 2, 4, \dots].$$

El milagro se repite para otras expresiones racionales con una sola raíz cuadrada. Siempre dan lugar a *fracciones continuas periódicas*, entendiendo por ella la que satisface $a_{n+p} = a_n$ a partir de cierto n con $p \in \mathbb{Z}^+$. Se suele indicar con una linea en la parte superior del grupo que se repite. Por ejemplo, las fracciones continuas anteriores se indican con $[2,\overline{4}\,]$ y $[1,3,\overline{2,4}\,]$

Veamos el cálculo contrario de obtener el número irracional correspondiente a una fracción continua periódica. Por ejemplo, calculemos el valor de $\alpha = [\,\overline{2}\,]$ y de $\beta = [-1,\overline{1,2}\,]$.

En el primer caso $\alpha = [2,\alpha]$ y el Lema 3.2.5. permite aplicar el algoritmo de la fracción continua:

$$\begin{array}{cccc} & & 2 & \alpha \\ \hline 0 & 1 & 2 & 2\alpha+1 \\ 1 & 0 & 1 & \alpha \\ \hline \end{array} \qquad \longrightarrow \qquad \alpha = [2,\alpha] \;\Leftrightarrow\; \alpha = \frac{2\alpha+1}{\alpha}.$$

Al resolver esta ecuación (usando $\alpha \ge 1$) se obtiene $\alpha = 1+\sqrt{2}$.

Para β, hallamos primero $\beta_0 = [\,\overline{1,2}\,]$ que cumple $\beta_0 = [1,2,\beta_0]$. Procediendo como antes,

$$\begin{array}{ccccc} & & 1 & 2 & \beta_0 \\ \hline 0 & 1 & 1 & 3 & 3\beta_0+1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 2\beta_0+1 \\ \hline \end{array} \qquad \longrightarrow \qquad \beta_0 = [1,2,\beta_0] \;\Leftrightarrow\; \beta_0 = \frac{3\beta_0+1}{2\beta_0+1}.$$

De donde $\beta_0 = (1+\sqrt{3})/2$. Ahora $\beta = [-1,\beta_0]$ que se reduce a un cálculo directo o a aplicar de nuevo el algoritmo de la fracción continua. Con este último,

$$\begin{array}{cccc} & & -1 & \beta_0 \\ \hline 0 & 1 & -1 & -\beta_0+1 \\ 1 & 0 & 1 & \beta_0 \\ \hline \end{array} \qquad \longrightarrow \qquad \beta = \frac{-\beta_0+1}{\beta_0} = \frac{1-\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}.$$

Racionalizando, $\beta = \sqrt{3}-2$.

La justificación de estas casualidades es un bello resultado debido a J.-L. Lagrange.

▶ **Teorema 3.2.6.** *Sea $\alpha \in \mathbb{R}-\mathbb{Q}$. La fracción continua de α es periódica si y solo si α es algebraico de grado* 2.

A los algebraicos (sobre $\mathbb{Q}$) de grado 2 también se les llama *números irracionales cuadráticos*.

Demostración. La implicación directa, que en realidad ya probó Euler, es sencilla. Basta seguir el esquema de los ejemplos anteriores. Si α tiene una fracción continua periódica *pura*, es decir, de la forma $\alpha = [\,\overline{a_0,a_1,\dots,a_{n-1}}\,]$, la ecuación $\alpha = [a_0,a_1,\dots,a_{n-1},\alpha]$ lleva por medio del Lema 3.2.5 a una ecuación cuadrática. Su solución no puede estar en $\mathbb{Q}$ por la Proposición 3.2.3. Si α tiene una fracción continua periódica *mixta*, es decir, de la forma

$\alpha = [a_0, a_1, \dots, a_{k-1}, \beta]$ con $\beta = [\,\overline{a_k, a_{k+1}, \dots, a_{k+n}}\,]$, α es una función racional de β y la conclusión es la misma.

El recíproco es más complicado. Digamos que α es raíz del polinomio irreducible $Ax^2 + Bx + C \in \mathbb{Z}[x]$ y sea $\alpha = [a_0, a_1, a_2, \dots]$ su fracción continua. Definimos $\alpha_{n+1} = [a_{n+1}, a_{n+2}, \dots]$. Por el Lema 3.2.5, α_{n+1} satisface la ecuación

$$A\Big(\frac{p_n x + p_{n-1}}{q_n x + q_{n-1}}\Big)^2 + B\frac{p_n x + p_{n-1}}{q_n x + q_{n-1}} + C = 0.$$

Quitando el denominador y operando, α_{n+1} es raíz de $A_n x^2 + B_n x + C_n$ donde los coeficientes responden a las fórmulas

$$\begin{cases} A_n = Ap_n^2 + Bp_n q_n + Cq_n^2, \\ B_n = 2Ap_n p_{n-1} + B(p_n q_{n-1} + p_{n-1} q_n) + 2Cq_n q_{n-1}, \\ C_n = Ap_{n-1}^2 + Bp_{n-1} q_{n-1} + Cq_{n-1}^2. \end{cases}$$

Supongamos que $\{A_n\}_{n=1}^\infty$ es una sucesión acotada, entonces $\{C_n\}_{n=1}^\infty$ también lo es porque se reduce a una traslación en el índice y $\{B_n\}_{n=1}^\infty$ también es acotada porque $B_n^2 = B^2 - 4AC + 4A_n C_n$. Esta igualdad se podría deducir con un cálculo directo farragoso empleando la Proposición 3.2.1, pero, si refrescamos nuestros conocimientos de álgebra lineal, es mucho más elegante apelar a que siempre que $\det(m_{ij}) = \pm 1$ el discriminante de $ax^2 + bx + c$ y de $a(m_{11}x + m_{12})^2 + b(m_{11}x + m_{12})(m_{21}x + m_{22}) + c(m_{21}x + m_{22})^2$ es el mismo. Esta afirmación se sigue de que $\det(M^t Q M) = \det Q$ con Q la matriz de la forma cuadrática asociada al primer polinomio.

En definitiva, si $\{A_n\}_{n=1}^\infty$ está acotada también lo está $\{(A_n, B_n, C_n)\}_{n=1}^\infty$ en $\mathbb{Z}^3$, lo cual implica que existen $k < \ell$ tales que $(A_k, B_k, C_k) = (A_\ell, B_\ell, C_\ell)$, por tanto $\alpha_k = \alpha_\ell$ y entonces $a_n = a_{\ell-k+n}$ para $n > k$ asegurando la periodicidad.

Para probar la acotación de $\{A_n\}_{n=1}^\infty$ empleamos el Lema 3.2.5 con $x = \alpha_{n+1}$ que implica $p_n = q_n\alpha + (-1)^{n+1}/(q_n\alpha_{n+1} + q_{n-1})$. Sustituyendo en la fórmula para A_n y operando un poco (recordando $A\alpha^2 + B\alpha + C = 0$), se obtiene

$$A_n = (2\alpha A + B)\frac{(-1)^{n+1} q_n}{q_n\alpha_{n+1} + q_{n-1}} + A\frac{1}{(q_n\alpha_{n+1} + q_{n-1})^2}.$$

Las dos fracciones de la expresión anterior están acotadas en valor absoluto por 1, ya que $\alpha_{n+1} > 1$, y se concluye $|A_n| \le |2\alpha A + B| + |A|$. □

La prueba anterior es la habitual, con pequeñas variaciones, en toda la literatura. En [45] hay una demostración moderna abreviada que sigue líneas diferentes, aunque con algunos puntos comunes.

Respecto a la fracción continua de las raíces cuadradas, se puede precisar un poco más su estructura. Si $D \in \mathbb{Z}^+$ no es un cuadrado perfecto entonces $\sqrt{D} = [a_0, \overline{a_1, a_2, \dots, a_{k-1}, 2a_0}\,]$ con $a_j = a_{k-j}$ para $1 \le j < k$.

Aquí se recogen los primeros casos:

$$\begin{array}{llll} \sqrt{2} = [1, \overline{2}\,], & \sqrt{3} = [1, \overline{1, 2}\,], & \sqrt{5} = [2, \overline{4}\,], & \sqrt{6} = [2, \overline{2, 4}\,], \\ \sqrt{7} = [2, \overline{1, 1, 1, 4}\,], & \sqrt{8} = [2, \overline{1, 4}\,], & \sqrt{10} = [3, \overline{6}\,], & \sqrt{11} = [3, \overline{3, 6}\,]. \end{array}$$

Un par de ejemplos con números mayores, ilustran la simetría del periodo:

$$\sqrt{46} = [6, \overline{1, 3, 1, 1, 2, 6, 2, 1, 1, 3, 1, 12}\,], \qquad \sqrt{73} = [8, \overline{1, 1, 5, 5, 1, 1, 16}\,].$$

Más adelante (Lema 3.3.9) encontraremos una explicación a por qué el periodo comienza tras a_0 y por qué aparece $2a_0$.