El Lema 2.1.5 permite una aproximación más precisa gracias a que τ es convolución de funciones sencillas. Dejando t libre, se obtiene

$$\sum_{n=1}^{N}\tau(n)=\sum_{k\le t}\frac{N}{k}+O(t)+\sum_{\ell\le N/t}\frac{N}{\ell}+O\Big(\frac{N}{t}\Big)-\big(t+O(1)\big)\Big(\frac{N}{t}+O(1)\Big).$$

Para minimizar la suma de los errores $O(t)$ y $O(N/t)$ la mejor elección es $t=\sqrt{N}$. Teniendo en cuenta (2.6), se obtiene

$$\sum_{n=1}^{N}\tau(n)=2N\big(\log\sqrt{N}+C+O(N^{-1/2})\big)-N+O(\sqrt{N}).$$

En definitiva,

$$\sum_{n=1}^{N}\tau(n)=N\log N+(2C-1)N+O(\sqrt{N}).$$

Una antigua conjetura en teoría de números afirma que $\sqrt{N}$ puede reemplazarse por N^{α} para cualquier $\alpha>1/4$ por cercano que esté a $1/4$. Este es el llamado *problema del divisor*. Cómo llegar a $\sqrt[3]{N}$ es conocido desde los primeros años del siglo XX mientras que mejorarlo ligeramente requiere técnicas bastante avanzadas.

2.2. Acerca de la distribución de los primos

Una prueba analítica de Euler. El teorema de los números primos. La hipótesis de Riemann. Un teorema tauberiano

Todos conocemos una prueba elemental de la infinitud del conjunto de los primos, quizá varias. Veamos ahora una muy breve, no tan elemental, debida a Euler que es precursora de los métodos analíticos en teoría de números.

El punto de partida es $\zeta(1^+)=\infty$. Con los baremos de rigor con los que se movía Euler esto no requería ninguna justificación porque $\zeta(1)$ es formalmente la serie armónica que diverge. Hoy en día somos más exigentes y seguramente nos quedamos más tranquilos apelando a las sumas de Riemann y escribiendo $\zeta(1+\epsilon)>\int_2^\infty x^{-1-\epsilon}\,dx=2^{-\epsilon}\epsilon^{-1}$ para todo $\epsilon>0$.

En cualquier caso, usando el producto de Euler (2.2)

$$\lim_{\sigma\to1^+}\prod_p(1-p^{-\sigma})^{-1}=\infty.$$

Ahora bien, esto es una contradicción clara si el producto es finito, pues cada factor tiene límite finito.

Cabe pensar que esta prueba no comporta ninguna ventaja con respecto a las elementales pues requiere el concepto de límite. Sin embargo, da más información pues nos dice que los primos no pueden crecer muy deprisa porque ello causaría la convergencia del producto. Así estamos seguros de que si p_n es el primo n-ésimo ninguna fórmula asintótica del tipo $p_n \sim Kn^\alpha$ puede ser correcta. Apurando más, $n(\log n)^\alpha = O(p_n)$ debe ser falso para cualquier $\alpha > 1$. Si p_n crece demasiado despacio, ζ tenderá rápidamente a ∞ cuando $s \to 1^+$. La pregunta es qué crecimiento de los primos es compatible con la verdadera singularidad que tiene ζ. Si crecen muy rápido no hay singularidad en absoluto y si crecen muy lento, la singularidad es demasiado grande. En gran medida la teoría analítica de números trata de extraer información aritmética a partir de singularidades de funciones.

Todo el argumento anterior se mueve en valores reales de s cercanos a 1. Sin embargo, Riemann mostró que para capturar todos los detalles de la distribución de los primos hay que fijarse también en valores complejos que no están cercanos a la singularidad y que escapan del ámbito de la serie de Dirichlet original (2.1).

Todo esto motiva el estudio de la singularidad de ζ en $s = 1$ y buscar expresiones alternativas que permitan entender mejor ζ como función compleja. Para nuestros propósitos, el siguiente resultado será suficiente.

Lema 2.2.1. *Para* $\Re(s) > 1$ *se tiene*

$$\zeta(s) = \frac{s}{s-1} - s\int_1^\infty \frac{\operatorname{Frac}(x)}{x^{s+1}}\,dx$$

donde $\operatorname{Frac}(x) = x - \lfloor x \rfloor$.

Demostración. Para $n \le x < n+1$ se tiene $\operatorname{Frac}(x) = x - n$, por tanto

$$\int_n^{n+1} \frac{\operatorname{Frac}(x)}{x^{s+1}}\,dx = \frac{1}{1-s}\Big(\frac{1}{(n+1)^{s-1}} - \frac{1}{n^{s-1}}\Big) + \frac{n}{s}\Big(\frac{1}{(n+1)^s} - \frac{1}{n^s}\Big).$$

Al sumar en n el primer paréntesis es una suma telescópica. Así pues,

$$s\int_1^\infty \frac{\operatorname{Frac}(x)}{x^{s+1}}\,dx = -\frac{s}{1-s} + \sum_{n=1}^\infty \frac{n}{(n+1)^s} - \sum_{n=1}^\infty \frac{n}{n^s}.$$

Si en la primera suma renombramos $n+1 \mapsto n$, se obtiene

$$\sum_{n=1}^\infty \frac{n}{(n+1)^s} - \sum_{n=1}^\infty \frac{n}{n^s} = \sum_{n=1}^\infty \frac{(n-1)-n}{n^s} = -\zeta(s)$$

y esto prueba el resultado. □

Corolario 2.2.2. *La función* $\zeta(s) - (s-1)^{-1}$ *tiene una extensión holomorfa a* $\Re(s) > 0$.

Demostración. La diferencia $s/(s-1)-(s-1)^{-1}$ es idénticamente uno para $s \neq 1$ y la integral es holomorfa por el teorema de Morera [4]. $\square$

Otra forma de decir lo mismo es que ζ tiene una extensión meromorfa a $\Re(s) > 0$ con un único polo en $s = 1$ de residuo 1. Riemann fue más lejos y probó que existe una extensión meromorfa a todo $\mathbb{C}$, con este único polo. Es decir, $\zeta(s) - (s-1)^{-1}$ se extiende a una función entera. En la bibliografía usual se llama ζ a la extensión meromorfa a $\mathbb{C}$ más que al trozo en $\Re(s) > 1$ definido en (2.1). Por otro lado, Riemann también probó que ζ tiene una simetría oculta que relaciona los valores $\zeta(s)$ y $\zeta(1-s)$. La extensión a $\mathbb{C}$ la podríamos hacer con una variante de la prueba del Lema 2.2.1, esencialmente integrar por partes sucesivamente [23, Th. 1.2], mientras que la simetría es más complicada (véanse en [48, II] varias pruebas).

Antes de seguir con la función ζ, vamos a pararnos a examinar qué esperamos del comportamiento a la larga de los primos. Gauss consideró la función contadora de los primos que hoy definimos como

$$\pi(x) = \big|\{p \le x \,:\, p \text{ es primo}\}\big|$$

permitiendo que $x \ge 2$ sea real, aunque, por supuesto, toda la información está en los enteros positivos. Con su destacable habilidad numérica y extensas tablas de primos, concluyó que $\pi(x)$ se parecía a $\int_2^x dt/\log t$, la función llamada *logaritmo integral*. Sin embargo, tuvieron que pasar muchos años (y la famosa memoria de Riemann por en medio) para que C.J. de la Vallée Poussin y J. Hadamard demostraran en 1896 que el error relativo tiende a cero. Es decir:

▶ **Teorema 2.2.3** (Teorema de los números primos)**.** *Cuando $x \to \infty$,*

$$\pi(x) \sim \mathrm{Li}(x) \qquad \textit{donde} \quad \mathrm{Li}(x) = \int_2^x \frac{dt}{\log t}.$$

En realidad, si no se entra en el tamaño del error, esta formulación es equivalente a otra mucho más simple:

Corolario 2.2.4. *Se cumple*

$$\pi(x) \sim \frac{x}{\log x} \qquad \textit{para } x \to \infty.$$

Demostración. Se verifica $\lim \mathrm{Li}(x)/f(x) = 1$ con $f(x) = x/\log x$ aplicando la regla de l'Hôpital. $\square$

También se puede enunciar como una asintótica sencilla para la sucesión de números primos.

Corolario 2.2.5. *Si p_n es el n-ésimo primo,*

$$p_n \sim n \log n \qquad \textit{cuando } n \to \infty.$$

Demostración. El Corolario 2.2.4 implica $n \log p_n \sim p_n$ ya que por definición, $\pi(p_n) = n$. Tomando logaritmos se deduce $\log n \sim \log p_n$ (porque $(\log \log p_n)/\log p_n$ tiende a cero). Multiplicando estas dos fórmulas asintóticas se obtiene el resultado. □

A pesar de la equivalencia de estos resultados, hay una gran diferencia numérica. En la línea de lo que consideró Gauss, $\mathrm{Li}(x)$ se parece mucho a $\pi(x)$ en el sentido de que el error relativo tiende a cero con cierta rapidez, mientras que en los corolarios los errores relativos tienden muy lentamente a cero, como el inverso de un logaritmo. Por ejemplo,

$$\frac{\pi(10^8) - \mathrm{Li}(10^8)}{\pi(10^8)} = -0{,}00013\ldots \quad \text{y} \quad \frac{\pi(10^8) - 10^8/\log(10^8)}{\pi(10^8)} = 0{,}057\ldots$$

Por otro lado, $p = 10^8 + 7$ es el primo en el lugar $n = 5761456$ y al emplear $n \log n$ como aproximación el error relativo es de algo más de una décima.

Para entender la relevancia de $\mathrm{Li}(x)$ es conveniente introducir una función aritmética no multiplicativa llamada *función de von Mangoldt*

$$\Lambda(n) = \begin{cases} \log p & \text{si } n = p^k,\ k \in \mathbb{Z}^+, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Satisface la relación

$$\log n = \sum_{d|n} \Lambda(d) \tag{2.7}$$

que se sigue fácilmente de $\log(p^k) = \sum_{d|p^k} \Lambda(d)$ y la factorización de n. La serie de Dirichlet asociada a Λ tiene una relación con ζ que es fundamental para el tratamiento analítico.

Lema 2.2.6. *Para $\Re(s) > 1$*

$$-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^s} \qquad y \qquad -\frac{\zeta'(s)}{s\zeta(s)} = \int_1^{\infty} \psi(x) x^{-s-1}\, dx$$

donde $\psi(x) = \sum_{n \le x} \Lambda(n)$.

La función ψ fue introducida por P.L. Chebyshev en sus estudios pioneros sobre la distribución de los primos. Para $x \in \mathbb{Z}^+$ coincide con el logaritmo del mínimo común múltiplo de los enteros positivos hasta x.

Demostración. La segunda igualdad se obtiene de la primera porque

$$s\int_k^{k+1}\psi(x)x^{-s-1}\,dx = s\psi(k)\int_k^{k+1}x^{-s-1}\,dx = \frac{\psi(k)}{k^s} - \frac{\psi(k+1)}{(k+1)^s} + \frac{\Lambda(k+1)}{(k+1)^s}$$

y al sumar en $k\in\mathbb{Z}^+$ los términos con ψ desaparecen por ser la suma telescópica y $\psi(1)=\Lambda(1)=0$.

La primera igualdad se puede deducir calculando la derivada logarítmica de (2.2). Aquí tomaremos como alternativa la fórmula (2.7) que indica $\log = \mathbf{1}*\Lambda$. Por la Proposición 2.1.2, $D_{\log}(s)=\zeta(s)D_\Lambda(s)$ y se deduce el resultado ya que $D_{\log}(s)=\sum_{n=1}^\infty n^{-s}\log n = -\zeta'(s)$. □

La relación entre π y ψ está recogida en el siguiente resultado. Más allá de su aspecto técnico, la idea a destacar es que si $\psi(x)$ está bien aproximado por x entonces $\pi(x)$ lo está por $\mathrm{Li}(x)$.

Lema 2.2.7. *Se cumple*

$$\pi(x)-\mathrm{Li}(x) = \frac{\psi(x)-x}{\log x} + \int_2^x \frac{\psi(t)-t}{t(\log t)^2}\,dt + O(x^{1/2}\log x).$$

El término de error se puede rebajar a $O(x^{1/2})$, pero eso es irrelevante para nuestros propósitos.

Pospondremos la demostración de este lema en favor de dar una idea, desde el punto de vista moderno de la revolucionaria memoria de Riemann de 1859 sobre la distribución de los números primos, su único trabajo en teoría de números ¡que ocupaba solo seis páginas! En [13] se incluye una traducción inglesa y en [11, §8] o [26, §5] se glosan sus contribuciones. Esencialmente, lo que hizo Riemann es darse cuenta de que utilizando el teorema de los residuos de una manera ingeniosa podía despejar $\psi(x)$ de la segunda fórmula del Lema 2.2.6. Algún analista moderno, seguramente preferiría usar transformadas de Fourier [12]. El caso es que, formalmente, para $x>1$ no entero se tiene

$$\psi(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_L F(s)\,ds \qquad \text{con} \quad F(s) = -\frac{x^s\zeta'(s)}{s\zeta(s)}$$

donde L es cualquier recta vertical $\{\Re(s)=c\}$ con $c>1$. Es importante insistir en lo de "formalmente" porque en L la función $1/s$ no decae lo suficientemente rápido como para garantizar la integrabilidad y las disconinuidades de ψ ya nos avisan de que hay algo raro. Desde el punto de vista actual, esto se arregla truncando L a un segmento y añadiendo un término de error pequeño. Es de esperar que $F(s)$ tienda rápido a cero cuando $\Re(s)\to-\infty$ porque x^s decae exponencialmente. Entonces, cruzando los dedos para que la convergencia no nos dé ningún problema, parece que al mover L hacia $\Re(s)=-\infty$ por el teorema de los residuos, deberíamos obtener que $\psi(x)$ es exactamente igual a la suma de los residuos de F. Los polos están en $s = 1$, $s = 0$ y en cada valor ρ en el que se anula ζ. Los residuos correspondientes son

$$\operatorname{Res}(F,1) = x, \qquad \operatorname{Res}(F,0) = -\frac{\zeta'(0)}{\zeta(0)} \qquad \text{y} \qquad \operatorname{Res}(F,\rho) = -\frac{x^\rho}{\rho}.$$

Conjeturalmente los ceros de la función ζ son simples y si alguno no lo fuera el último residuo estaría multiplicado por el orden del cero. Esto no es problema ya que la aplicación del teorema de los residuos seguiría siendo correcta repitiendo cada cero con su multiplicidad. El caso es que tenemos la identidad formal

$$\psi(x) = x - \frac{\zeta'(0)}{\zeta(0)} - \sum_\rho \frac{x^\rho}{\rho} \qquad \text{para} \quad x \in \mathbb{R}_{>1} - \mathbb{Z} \tag{2.8}$$

con ρ recorriendo los ceros de ζ. Todo el tema de la convergencia está en entredicho, pero supongamos que no hay problemas. Dado que $|x^\rho| = x^{\Re(\rho)}$, lo que sugiere esta fórmula en combinación con el Lema 2.2.7 es que la localización de los ceros determina el error en el teorema de los números primos.

▶ **Proposición 2.2.8.** *Si todos los ceros ρ de ζ cumplen $\Re(\rho) \le \sigma_0$ entonces para cualquier $\sigma > \sigma_0$ se tiene*

$$\pi(x) - \operatorname{Li}(x) = O(x^\sigma).$$

Además, si existe un cero con $\Re(\rho) = \sigma_0$ la fórmula anterior no se cumple para ningún $\sigma < \sigma_0$.

Este resultado se sabe probar. La manera habitual de no meterse en grandes problemas relacionados con la convergencia es sustituir (2.8) por una versión truncada en la que la suma está limitada a $|\Im(\rho)| < N$ con N grande y hay un error que depende de N.

Por otro lado, como antes hemos mencionado, Riemann probó en su memoria que ζ tiene una simetría oculta, de la que se deduce que si ρ es un cero en $\Re(s) > 0$ entonces $1 - \rho$ también lo es y por tanto en la Proposición 2.2.8 siempre $\sigma_0 \ge 1/2$. La previsión más optimista es que, por alguna razón, los ceros en $\Re(s) > 0$ estuvieran concentrados en $\Re(\rho) = 1/2$. El propio Riemann menciona de pasada esa posibilidad, quizá motivado por cálculos numéricos con los ceros, encontrados póstumamente entre sus papeles y no recogidos en su memoria.

Hipótesis de Riemann. Si $\zeta(\rho) = 0$ con $\Re(\rho) > 0$ entonces $\Re(\rho) = 1/2$.

Es algo tan singular que los ceros de una función compleja estén en fila, que parece de esas cosas que deben ser o fáciles de probar o de negar con un contraejemplo. Ninguna de estas situaciones, en las que aparentemente confiaba Hilbert, se ha producido y algunos piensan que la hipótesis de Riemann es el problema abierto más importante de las matemáticas.

Corolario 2.2.9. *Si la hipótesis de Riemann es cierta entonces* $\pi(x) = \mathrm{Li}(x) + O(x^\sigma)$ *para cualquier* $\sigma > 1/2$ *y tal fórmula no se verifica para ningún* $\sigma < 1/2$.

En realidad, se sabe algo más. Si se cumpliera la hipótesis de Riemann entonces [11], [14]

$$\pi(x) = \mathrm{Li}(x) + O(x^{1/2}\log x) \qquad \text{y} \quad \limsup \frac{\pi(x) - \mathrm{Li}(x)}{x^{1/2}} = \infty.$$

Los avances hacia la hipótesis de Riemann son muy pocos a pesar de más de 150 años de investigación. Gracias a (2.2), no los hay en $\Re(s) > 1$. Hasta la fecha no se conoce ningún $\sigma_0 < 1$ tal que no haya ceros en $\Re(s) > \sigma_0$. Se sabe que no hay ceros en la línea $\Re(s) = 1$ y, en cierto modo, lo que permitió probar el teorema de los números primos a de la Vallée Poussin y Hadamard sin pasar por la Proposición 2.2.8 fue obtener que los posibles ceros que tiendan a $\Re(s) = 1$ no pueden hacerlo muy deprisa.

En el lado positivo, se conoce que en $\Re(s) = 1/2$, la llamada *línea crítica*, no solo hay infinitos ceros sino, en cierto sentido, una proporción positiva de ellos [26]. También, bajo cierta interpretación probabilista, se sabe que es más improbable que aparezca un cero fuera de la línea crítica cuanto más nos alejamos de ella.

Hay muchas equivalencias de las hipótesis de Riemann, algunas con enunciado elemental. Una que se ha hecho relativamente famosa [41], [33], es que la hipótesis de Riemann es cierta si y solo si

$$\sum_{d|n} d \le e^C n \log\log n \qquad \text{para} \quad n > 5040$$

donde $C = 0{,}57721\ldots$ es la constante de Euler-Mascheroni.

Demostración del Lema 2.2.7. Hay menos de $x^{1/2}$ primos al cuadrado menores o iguales que x y lo mismo ocurre con primos al cubo u otras potencias mayores, entonces $\#\{p^k \le x : k \ge 2\} = O(x^{1/2}\log x)$. Por tanto,

$$\pi(x) = \sum_{2\le n\le x} \frac{\Lambda(n)}{\log n} + O(x^{1/2}\log x).$$

Sea $N = \lfloor x \rfloor$. El sumatorio anterior es igual a

$$\sum_{n=2}^{N} \frac{\psi(n) - \psi(n-1)}{\log n} = \sum_{n=2}^{N} \frac{\psi(n)}{\log n} - \sum_{n=1}^{N-1} \frac{\psi(n)}{\log(n+1)}.$$

Escribiendo $1/\log n - 1/\log(n+1) = \int_n^{n+1} t^{-1}(\log t)^{-2}\,dt$ se obtiene

$$\sum_{2\le n\le x} \frac{\Lambda(n)}{\log n} = \frac{\psi(N)}{\log N} + \sum_{n=2}^{N-1} \int_n^{n+1} \frac{\psi(n)\,dt}{t(\log t)^2} = \frac{\psi(N)}{\log N} + \int_2^N \frac{\psi(t)}{t(\log t)^2}.$$

Si extendemos el límite superior de la última integral hasta x, debemos compensar el exceso restando $\psi(N)\int_N^x t^{-1}(\log t)^{-2}\,dt$, que es $\psi(N)\big((\log N)^{-1} - (\log x)^{-1}\big)$, y teniendo en cuenta $\psi(N) = \psi(x)$, hemos probado

$$\pi(x) = \frac{\psi(x)}{\log x} + \int_2^x \frac{\psi(t)}{t(\log t)^2} + O(x^{1/2}\log x).$$

Por otro lado, integrando por partes,

$$\mathrm{Li}(x) = \frac{x}{\log x} - \frac{2}{\log 2} + \int_2^x \frac{dt}{(\log t)^2}.$$

Restando ambas identidades se obtiene el resultado. $\square$

Merece la pena resaltar que la principal obstrucción para probar el Teorema 2.2.3 es garantizar la existencia de un límite.

Proposición 2.2.10. *Si existe* $\lim \psi(x)/x$ *entonces* $\pi(x) \sim \mathrm{Li}(x)$.

Una ligera variación en la prueba muestra que $\lim \psi(x)/x = \infty$ no se cumple. Chebyshev consiguió hallar dos constantes positivas K_- y K_+ con argumentos elementales, basados en números combinatorios [14], tales que $K_- < \psi(x)/x < K_+$ a partir de cierto x explícito al igual que las constantes. Su principal objetivo, que alcanzó, fue acercar lo suficiente K_- y K_+ para probar el *postulado de Bertrand* que afirma que todo intervalo $[N, 2N]$ contiene al menos un primo.

Demostración. Sea $\ell = \lim \psi(x)/x$. Por la definición de límite, para cada $\epsilon > 0$ existe N tal que $(\ell - \epsilon)x < \psi(x) < (\ell + \epsilon)x$ si $x > N$. Por tanto, para cualquier $s \to 1$

$$\frac{\ell - \epsilon}{s-1} N^{1-\epsilon} < \int_1^\infty \psi(x)x^{-s-1}\,dx < \int_1^N \psi(x)x^{-s-1}\,dx + \frac{\ell+\epsilon}{s-1}N^{1-\epsilon}.$$

Multiplicando por $s-1$, tomando límites cuando $s \to 1^+$ y permitiendo que ϵ sea arbitrariamente pequeño, se deduce

$$\lim_{s\to 1^+} (s-1)\int_1^\infty \psi(x)x^{-s-1}\,dx = \ell.$$

Por otro lado, el Corolario 2.2.2 implica que $-(s-1)s^{-1}\zeta'(s)/\zeta(s)$ tiene límite uno cuando $s \to 1^+$, así pues $\ell = 1$. Es decir, $(\psi(x) - x)/x \to 0$. Dividiendo por $x/\log x$ en el Lema 2.2.7 se concluye $\big(\pi(x) - \mathrm{Li}(x)\big)(\log x)/x \to 0$ que da el resultado recordando $\mathrm{Li}(x) \sim x/\log x$. $\square$

Un integral del tipo $\int_1^\infty f(x)x^{-s}\,dx$ cuando $s \to 1^+$ da una idea del promedio de f. La pregunta analítica subyacente es si conociendo cómo degeneran los promedios de una función es posible obtener su asintótica. La respuesta genérica es que no. En el caso de la integral anterior porque f podría tener picos arbitrarios tan finos que no contribuyeran significativamente a la integral y que dotaran a la asintótica de un comportamiento caótico. El reto es imponer condiciones extra sobre f que permitan obtener respuestas afirmativas. Los resultados de este tipo que recuperan asintóticas a partir de promedios se dice que son *teoremas tauberianos* por el apellido del autor del primero de ellos en el contexto de las series. Uno de los más famosos en la actualidad es el siguiente:

Teorema 2.2.11 (de Wiener-Ikehara). *Sea $f : [0,\infty) \longrightarrow [0,\infty)$ no decreciente y supongamos que*

$$F(s) = \int_0^\infty f(t)e^{-st}\,dt$$

converge en $\Re(s) > 1$ y que existe $K \neq 0$ tal que

$$g(t) = \lim_{\sigma\to 0^+}\Big(F(1+\sigma+it) - \frac{K}{\sigma+it}\Big)$$

define una función continua $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$. Entonces se cumple

$$f(x) \sim Ke^x \qquad \textit{cuando} \quad x \to \infty.$$

La demostración de este resultado no es demasiado breve y además es un poco complicada, aunque asequible para un estudiante de grado de matemáticas. No la veremos aquí (el lector interesado puede consultar [37, Th. 8.6] o [14, Th. 2.11]). Otra razón para no incluir la demostración es que, a diferencia de los argumentos de Riemann, no aporta información sobre la relación entre la función ζ y el orden del error al aproximar $\pi(x)$ por $\mathrm{Li}(x)$.

Dando por supuesto ese cañón analítico que constituye el Teorema 2.2.11, todo lo que nos separa del teorema de los números primos es el siguiente resultado que es crucial en casi todas las pruebas de este resultado.

Lema 2.2.12. *En $\Re(s) = 1$, $s \neq 1$, se tiene $\zeta(s) \neq 0$.*

Demostración. Supongamos que se tuviera $\zeta(1+it_0) = 0$ para cierto $t_0 \neq 0$ real. La humilde relación trigonométrica $3+4\cos\alpha+\cos(2\alpha) = 2(1+\cos\alpha)^2$ implica $3 \geq -4\Re\big(n^{-it_0}\big) - \Re\big(n^{-2it_0}\big)$ y, recordando el Lema 2.2.6, para $\sigma > 1$

$$-3\frac{\zeta'(\sigma)}{\zeta(\sigma)} \geq 4\Re\Big(\frac{\zeta'(\sigma+it_0)}{\zeta(\sigma+it_0)}\Big) + \Re\Big(\frac{\zeta'(\sigma+2it_0)}{\zeta(\sigma+2it_0)}\Big).$$

Multiplicando por $\sigma - 1$ y tomando límites el primer término tiende a -1 (por el Corolario 2.2.2). Si m es la multiplicidad del cero $1+it_0$, se tiene

$\zeta(s) \sim C(s-\rho)^m$ y $\zeta'(s) \sim Cm(s-\rho)^{m-1}$ cuando $s \to \rho$ y así el límite correspondiente al primer sumando del segundo miembro por $\sigma - 1$ es m. El segundo dará cero si $\zeta(1+2it_0) \neq 0$ o, de nuevo, la multiplicidad si $\zeta(1+2it_0) = 0$. En cualquier caso, se obtiene $3 \geq 4m$ que es una contradicción porque m es un entero positivo. $\square$

Demostración del Teorema 2.2.3. Tras el cambio $x = e^t$ en la fórmula del Lema 2.2.7, el Teorema 2.2.11 con $F(s) = -s^{-1}\zeta'(s)/\zeta(s)$ daría $\psi(e^x) \sim e^x$, y por tanto $\psi(x) \sim x$, si comprobamos que las hipótesis se satisfacen para $K = 1$. Con el Lema 2.2.7 se terminaría la demostración.

Para comprobar las hipótesis, usamos el Lema 2.2.12 que implica que $1/\zeta(s)$ es holomorfa en un abierto $\mathcal{U}$ que contiene a $\Re(s) \geq 1$. El Corolario 2.2.2 asegura que $-s^{-1}\zeta'(s)/\zeta(s) - (s-1)^{-1}$ es holomorfa en un entorno de 1 y en todo $\mathcal{U}$, porque $\zeta(s)$ no se anula. De ello se deduce la continuidad de g porque una función holomorfa en un abierto es en particular continua. $\square$

Esta y la mayoría de las pruebas del teorema de los números primos dan la sensación de ser demasiado analíticas y que, a pesar de la Proposición 2.2.10, debería existir una demostración que dependiera menos de conocimientos de variable real o compleja. Durante algún tiempo se creyó que una prueba con técnicas elementales causaría un gran impacto en nuestra comprensión sobre los números primos. En 1949 se encontraron pruebas de este tipo gracias a P. Erdős y a A. Selberg [44] y después ha habido otras. Sin embargo, no han tenido el impacto esperado porque no son sencillas, ni siquiera conceptualmente. En la actualidad se tienden a valorar más las pruebas analíticas breves, sobre todo en el ámbito educativo. La que se ha hecho más famosa es una de D. J. Newman [39] que sigue las líneas habituales, pero reduce la parte tauberiana a algo muy sencillo. Menos conocida es una, fuera de las líneas clásicas, debida a H. Iwaniec cuya única desventaja es que muestra $x^{-1}\sum_{n\leq x}\mu(n) \to 0$ y hay que apelar a un resultado clásico (elemental, pero engorroso) que afirma que esto equivale al teorema de los números primos.

Nuestro conocimiento incondicional, sin suponer la hipótesis de Riemann, sobre el término de error en el teorema de los números primos es bastante débil y estancado. En los años 50 del siglo pasado, trabajos de M.N. Korobov y de I.M. Vinogradov mostraron [23]

$$\pi(x) - \mathrm{Li}(x) = O\big(xe^{-C(\log x)^{3/2}(\log\log x)^{-1/5}}\big)$$

con $C > 0$ una constante. Jugando con la notación O es fácil ver que esto es peor que $O(x^{1-\epsilon})$ para cualquier $\epsilon > 0$ (lo cual es natural después de la Proposición 2.2.8). Este resultado permanece imbatido en la actualidad (aunque sabemos que $C = 0{,}2098$ es válida [16]).