Series de potencias

Ingeniería de Tecnologías y Servicios de Telecomunicación

Curso: Análisis Matemático I Profesor: Fernando Chamizo

1. Radio de convergencia

Una *serie de potencias* es una serie compleja del tipo

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n.$$

Si aplicamos el criterio del cociente o de la raíz se tiene que S converge absolutamente si

$$|z| < \frac{1}{\ell} \qquad \text{con} \quad \ell = \lim \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \quad \text{o} \quad \ell = \lim \sqrt[n]{|a_n|}$$

dando por supuesto que estos límites existen. Por otro lado, si $|z| > 1/\ell$ es fácil ver que $|a_n z|^n \to \infty$ y por tanto S diverge.

A $R = 1/\ell$ se le llama *radio de convergencia* porque S converge (absolutamente) en el círculo $|z| < R$, de radio R, y diverge en $|z| > R$. Lo que ocurre en la propia circunferencia $|z| = R$ depende de cada caso y es, en general, muy difícil de estudiar.

Se admiten los casos extremos $R = 0$ y $R = \infty$, provenientes de $\ell = 0$ y $\ell = \infty$, que corresponden a que la serie no converja para ningún valor $z \neq 0$ o que converja para todos.

Por ejemplo, calculemos el radio de convergencia de $\sum_{n=0}^{\infty}(1+i)n^{-1}\big(2^n+1\big)^{-1}z^n$. Se tiene

$$\ell = \lim \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim \frac{n\big(2^{n+1}+1\big)}{(n+1)\big(2^n+1\big)} = \lim \frac{2+1/2^n}{(1+1/n)\big(1+1/2^n\big)} = 2,$$

donde en la penúltima igualdad se han dividido numerador y denominador por $n2^n$. Por tanto, el radio de convergencia es $R = 1/2$.

Una serie de potencias con cierto protagonismo en la siguiente sección es $\sum_{n=0}^{\infty} z^n/n!$. Comprobemos que su radio de convergencia corresponde a uno de los casos extremos:

$$\ell = \lim \frac{1/(n+1)!}{1/n!} = \lim \frac{n!}{(n+1)!} = \lim \frac{1}{n+1} = 0 \quad \Rightarrow \quad R = \infty.$$

Es decir, la serie converge para cualquier $z \in \mathbb{C}$.

Casi siempre es más cómodo decidir el radio de convergencia a través del criterio del cociente, pero hay excepciones. La serie de potencias $\sum_{n=1}^{\infty} n^n z^n$ es un ejemplo que también constituye un caso extremo. Se tiene

$$\ell = \text{lím} \sqrt[n]{|a_n|} = \text{lím}\, n = \infty \quad \Rightarrow \quad R = 0.$$

Por tanto la serie no converge para ningún valor excepto para $z = 0$.

No entraremos aquí en las dificultades que derivan de que uno puede buscar ejemplos raros en que los límites correspondientes a aplicar el criterio del cociente o la raíz no existan (ni sean infinito). Hay una manera de remediarlo, pero requiere el concepto de límite superior, que no se ha tratado en el curso.

Una propiedad interesante de las series de potencias es que dentro del radio de convergencia se comportan como "polinomios infinitos", en el sentido de que se pueden sumar restar, multiplicar, componer, derivar e integrar, de la manera esperada, preservando la convergencia.

Veremos una de las aplicaciones de ello en el próximo apartado. Por ahora, a modo de ejemplo rápido, consideremos $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} z^n/\sqrt{n}$ cuyo radio de convergencia es $R = 1$ porque $\text{lím} \sqrt{n}/\sqrt{n+1} = 1$. Por tanto tiene sentido su definición en $|z| < 1$ y allí su derivada es igual a $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{n}\, z^{n-1}$ que también puede escribirse como $\sum_{n=0}^{\infty} \sqrt{n+1}\, z^n$.

2. Series de Taylor

Algunos polinomios de Taylor alrededor del origen cumplen que cuando el grado crece indefinidamente el error tiende a cero, con lo que se establece una identidad entre la función y la serie de potencias obtenida como límite de los polinomios de Taylor, llamada *serie de Taylor*. Por ejemplo, para $f(x) = e^x$ sabíamos que $T_n(f, 0) = 1 + x/1! + x^2/2! + \cdots + x^n/n!$ y se tiene

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

para todo x debido a que el error, dado por $e^{\xi} x^{n+1}/(n+1)!$, tiende a cero, aunque no lo comprobaremos. Algo similar ocurre con el seno y del coseno. Concretamente,

$$\operatorname{sen} x = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}$$

y

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}.$$

Los polinomios de Taylor de estas funciones son fáciles de hallar con lo que sabemos y lo único que hemos hecho es poner un número arbitrariamente grande de términos. Supongamos ahora que deseamos calcular un polinomio de Taylor, por ejemplo $T_{10}(f,0)$, para $f(x)=e^{x^2}$. Esto conllevaría bastantes cálculos porque no parece haber una manera sencilla de derivar hasta diez veces esta función. Sin embargo, por lo dicho anteriormente, es lícito componer las series de potencias y así, sustituyendo x^2 en e^x, se tiene $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} x^{2n}/n!$. Truncando esta serie de Taylor, que es una especie de polinomio de Taylor infinito, obtenemos los de todos los grados, en particular,

$$T_{10}(f,0)=1+\frac{x^2}{1!}+\frac{x^4}{2!}+\frac{x^6}{3!}+\frac{x^8}{4!}+\frac{x^{10}}{5!}.$$

Veamos otro ejemplo. Por la suma de una progresión geométrica o por Taylor, sabemos que

$$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+x^3+x^4+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty} x^n \qquad \text{para} \quad -1<x<1.$$

El rango es consistente con que el radio de convergencia de la serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ sea 1. Componiendo con $-x^2$ e integrando entre 0 y x se obtiene

$$\arctan x=\int_0^x \frac{dx}{1+x^2}=\int_0^x \big(1-x^2+x^4-x^6+\dots\big)\,dx=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1}.$$

De nuevo, calcular $T_n(f,0)$ de $f(x)=\arctan x$ mediante la definición parece trabajoso porque no es evidente una fórmula para $f^{(n)}$, aunque realmente existe. Por otro lado, integrando sin componer, obtendríamos la serie de Taylor para $-\log(1-x)$.

Para terminar, solo por si tienes curiosidad, estudiemos dos cabos sueltos teóricos que habían quedado en el curso y que tienen que ver con la serie de Taylor de e^x. El primero es la misteriosa fórmula $e^{i\alpha}=\cos\alpha+i\operatorname{sen}\alpha$. Si definimos e^z para $z\in\mathbb{C}$ por su serie, esto es, como $\sum_{n=0}^{\infty} z^n/n!$ que tiene radio de convergencia ∞ y hacemos lo mismo con $\operatorname{sen} z$ y $\cos z$ entonces es fácil ver que $e^{i\alpha}$ da lo mismo que $\cos\alpha+i\operatorname{sen}\alpha$. El segundo cabo suelto es la prueba de que la derivada de e^x sea ella misma. De nuevo, definiendo e^x por su serie y sabiendo que las series de potencias se pueden derivar término a término, $(e^x)'=\sum_{n=1}^{\infty} nz^{n-1}/n!=\sum_{n=1}^{\infty} z^{n-1}/(n-1)!=e^x$. El hecho de que al derivar el rango de n empiece en $n=1$ es solo porque el término independiente desaparece.