Funciones continuas

Ingeniería de Tecnologías y Servicios de Telecomunicación

Curso: Análisis Matemático I Profesor: Fernando Chamizo

1. Funciones elementales

Esencialmente las *funciones elementales* son aquellas que aparecen en una calculadora científica (como el seno, el coseno, la raíz, el logaritmo) y las que podemos construir a partir de ellas mediante operaciones elementales (suma, resta, multiplicación y división) o composiciones. En todo este capítulo consideramos solo funciones reales. No aparecerán números complejos.

Para ser un poco más precisos, esas funciones de las "calculadoras científicas" se pueden reducir a e^x, $\log x$, $\operatorname{sen} x$, $\cos x$ y $\arctan x$, dando por supuesto que tenemos las constantes y la *función identidad*, $f(x) = x$. En particular, todos los polinomios son funciones elementales (porque vienen de operar constantes y la identidad con sumas y multiplicaciones) y $\sqrt{x}$ y, en general, x^α también lo son porque coinciden con $e^{\frac{1}{2}\log x}$ y $e^{\alpha \log x}$.

A este respecto, recordemos que la composición de dos funciones es simplemente sustituir una en otra y se indica con un pequeño círculo:

$$(f \circ g)(x) = f\big(g(x)\big).$$

En la composición importa el orden y casi siempre $f \circ g$ y $g \circ f$ dan resultados diferentes. Por ejemplo, si $f(x) = \operatorname{sen}(2x)$ y $g(x) = \log x$, se tiene

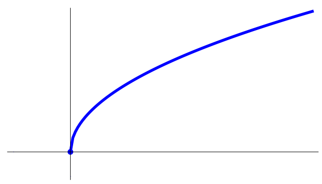
$$(f \circ g)(x) = \operatorname{sen}(2 \log x) \qquad \text{y} \qquad (g \circ f)(x) = \log \operatorname{sen}(2x).$$

El *dominio* de una función es el subconjunto de los números reales donde está bien definida y la *imagen* de una función es el conjunto de valores que alcanza. Se denotan mediante $\operatorname{Dom}(f)$ e $\operatorname{Im}(f)$. En fórmulas:

$$\operatorname{Dom}(f) = \{x \in \mathbb{R} : \exists f(x)\}, \qquad \operatorname{Im}(f) = \{f(x) \in \mathbb{R} : x \in \operatorname{Dom}(f)\}.$$

Cuando se aplica todo el rigor matemático, la definición de dominio tiene un sentido muy trivial porque una función no debería venir dada solo por una fórmula sino también por un conjunto inicial que es lo que se llama dominio en un contexto riguroso. Aquí y en las matemáticas de bachillerato, estamos pensando en el dominio de manera diferente, como el subconjunto más grande de $\mathbb{R}$ en la que tendría sentido nuestra fórmula para la función. Dicho sea de paso, muchas veces en bachillerato se llama a la imagen *recorrido*.

Es bien conocido que cada función real tiene una gráfica, dada por el conjunto de puntos (x, y) con $y = f(x)$. Veamos para algunas funciones elementales básicas, el aspecto de la gráfica, el dominio y la imagen.

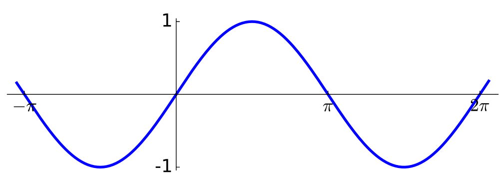


$\boxed{f(x) = \sqrt{x}}$

$\mathrm{Dom}(f) = [0, \infty)$

$\mathrm{Im}(f) = [0, \infty)$

Por definición la raíz cuadrada de los números reales $x \geq 0$ se toma positiva, a pesar de que tanto $\sqrt{x}$ como $-\sqrt{x}$ al elevarlos al cuadrado dan x.

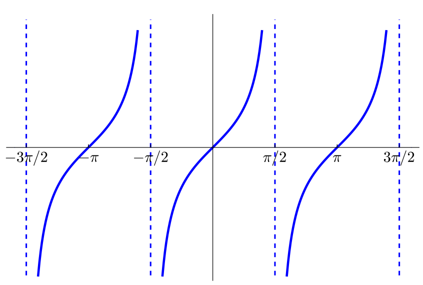


$\boxed{f(x) = \operatorname{sen} x}$

$\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R}$

$\mathrm{Im}(f) = [-1, 1]$

Recuerda que el argumento de las razones trigonométricas va siempre en radianes. Aunque parezca una manía de matemáticos, es algo necesario en análisis porque operando con grados las fórmulas para las derivadas fallarían.



$\boxed{f(x) = \tan x}$

$\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R} - \left\{ \frac{\pi}{2}(2k+1) \, : \, k \in \mathbb{Z} \right\}$

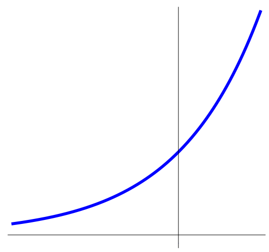
$\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}$

Aquí en los múltiplos impares de $\pi/2$ observamos asíntotas verticales. Esto significa que la gráfica se acerca indefinidamente a rectas verticales en dichos puntos. La explicación es que $\tan x = \operatorname{sen} x / \cos x$ y en esos múltiplos impares obtenemos formalmente $\pm 1/0$.

Se dice que una función f es *periódica* si $f(x) = f(x + p)$ para algún $p \neq 0$. Normalmente se llama *periodo* de una función periódica al mínimo (si existe) de los $p > 0$ con tal propiedad.

Con esta definición, $\operatorname{sen} x$ y $\cos x$ tienen periodo 2π, mientras que $\tan x$ tiene periodo π, por tanto el periodo no se conserva por divisiones, ni por el resto de las funciones elementales.

Si te gustan los detalles finos de matemáticas, quizá te asombre que haya funciones periódicas no constantes sin periodo en el sentido anterior. Por ejemplo, la función f que vale 1 para $x \in \mathbb{Q}$ y 0 para $x \notin \mathbb{Q}$ cumple $f(x) = f(x + 1/n)$ con $n \in \mathbb{Z}$ y el ínfimo de $\{1/n\}$ es cero.

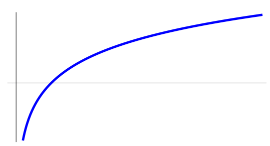


$\boxed{f(x) = e^x}$

$\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R}$

$\mathrm{Im}(f) = (0, \infty)$

La función exponencial tiene un crecimiento muy rápido. Debido a ello, la mayoría de las representaciones no tienen la misma escala en ambos ejes. De nuevo, no hay nada maniático en usar como base un número tan raro como e. Si no lo hiciéramos así y escogiéramos por ejemplo 10, habría un montón de fórmulas que se complicarían mucho.



$\boxed{f(x) = \log x}$

$\mathrm{Dom}(f) = (0, \infty)$

$\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}$

Recuerda que los logaritmos son neperianos. En bachillerato muchas veces se escribe $\ln x$ para distinguir el logaritmo neperiano, pero esa precaución es ya innecesaria. El crecimiento del logaritmo es muy lento y también lo es la aproximación a la asíntota vertical dada por el eje Y, el logaritmo de una millonésima todavía no llega a -14.

El hecho de que el dominio y la imagen se intercambien en los dos últimos ejemplos está relacionado con que sean *funciones inversas* una de la otra, es decir, que podamos deshacer una con la otra. En otras palabras, la composición de ambas es la identidad en el dominio correspondiente.

Un ejemplo de esta situación es:

$$f(x) = \frac{x+1}{x-2}, \qquad g(x) = \frac{1+2x}{x-1}.$$

Claramente, $\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{2\}$ y $\mathrm{Dom}(g) = \mathbb{R} - \{1\}$. Calcular la imagen es más difícil. La manera más sistemática consiste en estudiar cuándo podemos despejar la x en $y = f(x)$ y en $y = g(x)$. Algo más truculento, pero muy rápido, es reescribir las funciones como

$$f(x) = 1 + \frac{3}{x-2}, \qquad g(x) = 2 + \frac{3}{x-1}.$$

Las divisiones $3/(x-2)$ y $3/(x-1)$ pueden dar cualquier número excepto cero, por tanto se obtiene inmediatamente $\operatorname{Im}(f)=\mathbb{R}-\{1\}$ y $\operatorname{Im}(g)=\mathbb{R}-\{2\}$.

Si comprobamos las composiciones de f y g veremos que una está deshaciendo a la otra, se deice que una es la *función inversa* de la otra, por ello se intercambian dominio e imagen:

$$(f\circ g)(x)=\frac{\frac{1+2x}{x-1}+1}{\frac{1+2x}{x-1}-2}=\frac{\frac{3x}{x-1}}{\frac{3}{x-1}}=x,\qquad (g\circ f)(x)=\frac{1+\frac{2x+2}{x-2}}{\frac{x+1}{x-2}-1}=\frac{\frac{3x}{x-2}}{\frac{3}{x-2}}=x.$$

Dos funciones que normalmente no se consideran elementales son el valor absoluto $|x|$ y la *parte entera* $\lfloor x\rfloor$. La primera ya la conocemos y la segunda como su nombre sugiere es el primer entero por debajo de o igual a x:

$$\lfloor x\rfloor=\text{máx}\{n\le x\,:\,n\in\mathbb{Z}\}.$$

Para los positivos es lo que todos esperamos, $\lfloor 2{,}3\rfloor=2$, $\lfloor 100{,}9\rfloor=100$, $\lfloor 2023\rfloor=2023$, mientras que a más de uno le sorprenderá $\lfloor -1{,}3\rfloor=-2$.

Un par de ejemplos (sin desarrollar aquí) que involucran estas funciones elementales son

$$f(x)=\frac{1}{x-\lfloor x\rfloor}\qquad\text{y}\qquad g(x)=\frac{x-1/2}{|x|-|x-1|}$$

que verifican

$$\begin{cases}\operatorname{Dom}(f)=\mathbb{R}-\mathbb{Z},\\ \operatorname{Im}(f)=(1,\infty)\end{cases}\qquad\text{y}\qquad\begin{cases}\operatorname{Dom}(g)=\mathbb{R}-\{1/2\},\\ \operatorname{Im}(f)=[1/2,\infty).\end{cases}$$

Es un buen ejercicio hacer un esbozo de las gráficas para entender estos resultados.

2. Límite de una función

El concepto de límite de una función es una generalización del límite de una sucesión. Con la notación

$$\lim_{x\to a}f(x)$$

queremos indicar el valor (si existe) al que se acerca $f(x)$ cuando x se acerca a a (excluyendo el valor $x=a$.

La definición rigurosa que uno podría encontrar en un texto avanzado de que el límite es ℓ es tan críptica como

$$\forall\epsilon>0\ \exists\delta>0 \text{ tal que } 0\ne|x-a|<\delta\ \Rightarrow\ |f(x)-f(a)|<\epsilon.$$

La traducción en palabras es que por pequeño que sea ϵ siempre podemos conseguir que la distancia de $f(x)$ a ℓ sea menor que ϵ en cierto entorno restringido de a, esto es, un intervalo $(a-\delta, a+\delta)$ sin el punto central.

Eliminar $x=a$ de la definición permite que el límite pueda existir aunque $f(a)$ no tenga sentido. Por ejemplo, aunque $f(x)=x\,\mathrm{sen}\,\frac{1}{x}$ dé problemas al tratar de hallar $f(0)$, se cumple $\lim_{x\to 0} f(x)=0$ ya que para x pequeño, sea lo que sea $\mathrm{sen}\,\frac{1}{x}$ está en $[-1,1]$ y al multiplicar por x obtendremos un número pequeño. Por otro lado, si $g(x)=\mathrm{sen}\,\frac{1}{x}$ el límite $\lim_{x\to 0} g(x)$ no existe, porque podemos encontrar números pequeños, por ejemplo $(N\pi)^{-1}$ con N un entero grande para los que g se anula y otros, como $2((4N+1)\pi)^{-1}$, de nuevo con N un entero grande, para los que g es uno. Entonces $g(x)$ no se acerca a una cantidad definida cuando $x\to 0$.

Las funciones elementales tienen límite en los puntos en los que están definidas. Esto no se aplica a las funciones no elementales. Por ejemplo, no existe $\lim_{x\to 2}\lfloor x\rfloor$ porque para números cercanos a 2 un poco mayores, como $2+10^{-6}$, obtenemos que la función vale 2 mientras que para los que son un poco menores, como $2-10^{-6}$, obtenemos 1.

La definición de límite se extiende al caso $a=\infty$ (esto es, $x\to\infty$) simplemente copiando el concepto para sucesiones. También consideramos que $\lim_{x\to a} f(x)=\infty$ tiene el mismo sentido que allí: es una manera de indicar que no existe el límite, pero que sabemos que al acercarnos a $x=a$ la función toma valores arbitrariamente grandes (en valor absoluto).

Respecto a la técnica para hallar límites, se aplica lo mismo que sabíamos con las sucesiones. Quizá lo único reseñable es que la indeterminación $0/0$ es más común en el contexto de las funciones que en el de las sucesiones y que suele estar ligada a algún tipo de simplificación.

Por ejemplo, calculemos

$$L_1=\lim_{x\to -1}\frac{x^3+1}{x^2-1} \qquad \text{y} \qquad L_2=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}.$$

Ambos son del tipo $0/0$. En L_1 la simplificación se consigue factorizando:

$$L_1=\lim_{x\to -1}\frac{(x+1)(x^2-x+1)}{(x+1)(x-1)}=\lim_{x\to -1}\frac{x^2-x+1}{x-1}=-\frac{1}{2}.$$

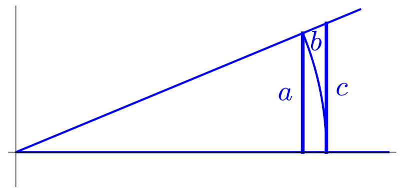
En el segundo no hay una simplificación directa y multiplicamos y dividimos por el conjugando para llevarla a cabo:

$$L_2=\lim_{x\to 0}\frac{\big(\sqrt{1+x}\big)^2-\big(\sqrt{1-x}\big)^2}{x\big(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}\big)}=\lim_{x\to 0}\frac{2}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}=1.$$

Otro ejemplo, esta vez de 1^∞, es

$$\lim_{x\to 2}\Big(\frac{x}{3x-4}\Big)^{1/(x-2)}=e^{\lim_{x\to 2}\frac{1}{x-2}\left(\frac{x}{3x-4}-1\right)}=e^{\lim_{x\to 2}\frac{-2}{3x-4}}=e^{-1}.$$

Por ahora, están fuera de nuestro alcance muchos límites que involucran funciones trigonométricas, logaritmos y exponenciales. Para ellos emplearemos más adelante derivadas. Veamos, no obstante, uno básico que puede tratarse de una forma geométrica



$a = \operatorname{sen} x$
$b = x$
$c = \tan x$

En el dibujo, b es un arco de la circunferencia de radio 1 que tiene ángulo x en radianes, lo cual es lo mismo que decir que tiene longitud x (digamos que es positivo). Sabemos que a y c representan el seno y la tangente. Se cumple $a \le b \le c$. La primera desigualdad te parecerá obvia y la segunda creíble (se podría justificar con un argumento geométrico). Esto implica

$$\cos x \le \frac{\operatorname{sen} x}{x} \le 1.$$

Aunque el dibujo lo hemos hecho solo para $x > 0$, está claro que estas desigualdades funcionan también para $x < 0$ porque las funciones $\cos x$ y $(\operatorname{sen} x)/x$ son invariantes por $x \leftrightarrow -x$. Si x es pequeño, $\cos x$ se acerca a uno, por tanto debe cumplirse

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1.$$

Este resultado permite el cálculo de límites más complicados usando que las operaciones elementales respetan el paso al límite. Por ejemplo,

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^3(2+\operatorname{sen} x)}{(2x-\operatorname{sen} x)^3} = \lim_{x\to 0} \frac{2+\operatorname{sen} x}{\left(2-\frac{\operatorname{sen} x}{x}\right)^3} = \frac{2}{1} = 2.$$

Los *límites laterales*

$$\lim_{x\to a^+} f(x) \qquad \text{y} \qquad \lim_{x\to a^-} f(x)$$

se definen como el límite usual pero añadiendo las condiciones $x > a$ y $x < a$, respectivamente. Es decir, en el primer caso solo permitimos acercarnos a a por la derecha y en el segundo caso solo por la izquierda.

Por ejemplo $f(x) = x/|x|$ es 1 para $x > 0$ y es -1 para $x < 0$, por tanto

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{x}{|x|} = 1 \qquad \text{y} \qquad \lim_{x\to 1^-} \frac{x}{|x|} = -1.$$

Otro ejemplo un poco más elaborado es:

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{1}{1+e^{-1/(x-1)}} = \frac{1}{1+e^{-\infty}} = 1 \qquad \text{y} \qquad \lim_{x\to 1^-} \frac{1}{1+e^{-1/(x-1)}} = \frac{1}{1+e^{+\infty}} = 0.$$

Si los límites laterales no coinciden, entonces el límite no puede existir porque por lados diferentes no acercamos a diferentes valores. De hecho la existencia del límite es equivalente a la existencia de los límites laterales imponiendo además que sean iguales.

Por supuesto, hay funciones para los que los límites laterales no existen (en particular, sin límite), como $f(x) = \operatorname{sen}(1/x)$ que no los tiene cuando $x \to 0^{\pm}$.

3. Continuidad

Se dice que una función es *continua* en $x = a$ si existen $f(a)$ y $\lim_{x\to a} f(x)$ y ambos coinciden.

Intuitivamente, una función es continua si su gráfica no está rota, aunque para funciones muy raras, como $f(x) = \operatorname{sen}\frac{1}{x}$ si $x \neq 0$ y $f(0) = 0$ que no tiene límite en cero y por tanto no es continua allí, esta idea intuitiva tiene sus limitaciones.

Las funciones elementales son continuas en todos los puntos donde están definidas. Además, la continuidad es respetada por las operaciones elementales (salvo, como siempre, dividir por cero) y también por la composición. Así podemos decir que $f(x) = \log(1 + \cos x) + x^2$ es continua en todos los puntos excepto en $x = (2k+1)\pi$ porque son los únicos valores que hacen que $1 + \cos x$ se anule y entonces que el logaritmo no esté definido.

Muchas veces se usan funciones definidas a trozos como ejemplos o ejercicios en los que comprobar la continuidad. Si consideramos

$$f(x) = \begin{cases} x-1 & \text{si } x < 1, \\ A & \text{si } x = 1, \\ (\log x)^2 & \text{si } x > 1 \end{cases} \qquad \text{con } A \text{ una constante,}$$

para $x < 1$ o para $x > 1$ tenemos funciones elementales y la continuidad está garantizada. El único posible problema está en $x = 1$. Se cumple

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} (x-1) = 0 \qquad \text{y} \qquad \lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} (\log x)^2 = 0.$$

Por tanto existe $\lim_{x\to 1} f(x)$ y es nulo. Para que coincida con $f(1)$, debemos tomar $A = 0$. Otras elecciones de A dan funciones discontinuas.

Esta situación en la que existen $f(a)$ y $\lim_{x\to a} f(x)$, pero no coinciden se dice que corresponde a una *discontinuidad evitable*. Bastaría con modificar el valor de $f(a)$ para establecer la continuidad.

Hay otro tipo de discontinuidades que reciben un nombre, son las *discontinuidades de salto*. Ocurren cuando porque los límites laterales existen pero no coinciden, impidiendo que exista el límite. La función $f(x) = x/|x|$, considerada anteriormente, es un ejemplo de ello y su gráfica ilustra la terminología empleada.

Una función puede ser discontinua en muchos puntos, incluso en infinitos puntos incluidos en un intervalo acotado. Así $f(x) = (-1)^{\lfloor 1/x \rfloor}$ definida para $x \in (0,1)$ es discontinua en todos los puntos $\{1/n\}_{n=2}^{\infty}$. Incluso es posible construir una función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ discontinua en todos los puntos de $\mathbb{R}$. El ejemplo típico es $f(x) = 1$ si $x \in \mathbb{Q}$ y $f(x) = 0$ si $x \notin \mathbb{Q}$ (que ya apareció en relación con la periodicidad). No tiene límite en ningún punto porque dado un irracional hay números racionales arbitrariamente cerca y viceversa.

Hay dos resultados sobre funciones continuas que son importantes en el desarrollo de la teoría, aunque te parezca que dicen cosas bastante obvias. El primero, además, sirve de base a un método en cálculo numérico.

> Teorema de los valores intermedios.*Si* $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *es una función continua entonces cualquier valor entre* $f(a)$ *y* $f(b)$ *pertenece a* $\mathrm{Im}(f)$.

> Teorema de Weierstrass.*Si* $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *es una función continua entonces* $\mathrm{Im}(f)$ *tiene supremo e ínfimo que son máximo y mínimo.*

Consideremos

$$f(x) = x^3 + \frac{3}{1 + x^2 + \cos x}.$$

Es continua (es una función elemental y el denominador no se anula). Como es obvio que $f(-2) < 0$ y $f(0) > 0$ entonces, por el teorema de los valores intermedios, $0 \in \mathrm{Im}(f)$, esto es, existe $r \in [-2,1]$ tal que $f(r) = 0$. Hemos probado que la complicada ecuación $f(x) = 0$ tiene al menos una raíz.

Para hallarla podríamos ir dividiendo sucesivamente el intervalo $[-2,1]$ por la mitad quedándonos siempre con el trozo en el que los signos son opuestos en los extremos. Con ello conseguiremos una aproximación arbitrariamente buena de r. Este procedimiento se llama *método de la bisección* y es la aplicación al cálculo numérico a la que nos hemos referido. Los primeros pasos serían:

$[a,b]$		$f(a)$	$f(b)$	$[a,b]$		$f(a)$	$f(b)$
$[-2,0]$	$\to$	$-7{,}34$	$1{,}5$	$[-1{,}125,-1]$	$\to$	$-0{,}31$	$0{,}18$
$[-2,-1]$	$\to$	$-7{,}34$	$0{,}18$	$[-1{,}0625,-1]$	$\to$	$-0{,}05$	$0{,}18$
$[-1{,}5,-1]$	$\to$	$-2{,}47$	$0{,}18$	$[-1{,}0625,-1{,}03125]$	$\to$	$-0{,}05$	$0{,}06$
$[-1{,}25,-1]$	$\to$	$-0{,}91$	$0{,}18$	$[-1{,}0625,-1{,}046875]$	$\to$	$-0{,}05$	$0{,}008$

Con esto obtenemos $-1{,}0625 < r < -1{,}046875$. Con una veintena de pasos obtendríamos $r = -1{,}04901\ldots$ y la precisión se puede mejorar arbitrariamente a base de incrementar el número de cálculos.