

- 1) Prueba por inducción $1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) = n^2$ para $n \in \mathbb{N}$.
- 2) Prueba $\frac{2}{1 \cdot 3} + \frac{2}{3 \cdot 5} + \dots + \frac{2}{(2n-1) \cdot (2n+1)} = \frac{2n}{2n+1}$ para $n \in \mathbb{N}$. Puedes usar inducción o una prueba más sencilla basada en que $\frac{2}{k(k+2)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+2}$.
- 3) Prueba por inducción que $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$ para $n \in \mathbb{N}$.
- 4) Prueba por inducción que si $k \geq 2$ es par, $3^k + 7$ es siempre divisible por 8.
- 5) Prueba que $n(n^2 + 11)$ es siempre divisible por 6 para $n \in \mathbb{N}$.
- 6) Decide si $\{\frac{1}{n} + (-1)^n : n \in \mathbb{N}\}$ tiene máximo o mínimo.
- 7) Halla el supremo y el ínfimo de $\{\frac{2n^2+1}{n^2+1} : n \in \mathbb{Z}\}$.
- 8) Halla el supremo y el ínfimo de $\{x \in \mathbb{Q} : 2 \leq x^2 \leq 9\}$. ¿Son respectivamente máximo y mínimo? ¿Y si cambiamos 9 por 10?
- 9) Busca un ejemplo de un conjunto $A \subset \mathbb{R}$ tal que $\sup A = \infty$, $\inf A = 0$, no contenga a ningún intervalo (a, b) y no posea mínimo.
- 10) Halla todos los valores $x \in \mathbb{R}$ que verifican $\frac{2x-1}{x+3} < \frac{1}{3}$.
- 11) Calcula el supremo de $\{x \in \mathbb{R} : 1 - |x^2 - 3x + 2|\}$. ¿Es máximo?
- 12) Decide si existe algún $x \in \mathbb{R}$ tal que $|x^2 - 1| < |x| - 2$.
- 13) Halla todos los valores $x \in \mathbb{R}$ que verifican $|x + 1| + |x + 2| > 1$.
- 14) Dados $a < b$, explica por qué $|x - a| + |y - b| < b - a$ no tiene solución.
- 15) Halla la parte imaginaria de $(3 + i)^{-2} - 4(1 + i)^{-1}$.
- 16) Supongamos que $z \in \mathbb{C}$ tiene parte imaginaria positiva. Explica por qué podemos asegurar que $(3z + 1)/(5z + 2)$ también la tiene.
- 17) Dibuja el conjunto de los $z \in \mathbb{C}$ tales que $|3z + 1 + 2i|^2 \leq |3 + (1 + 2i)\bar{z}|^2$.
- 18) Halla una fórmula para $|(2 + i)\bar{z} + 1|^2 + |z - 2 - i|^2$ que solo dependa de $|z|^2$.
- 19) Calcula la parte real e imaginaria de $(2i)^{-2022}(\sqrt{3} - i)^{2023}$.
- 20) Halla una fórmula simplificada para $(1 + i)^{4n+1} + (1 - i)^{4n+1}$ donde $n \in \mathbb{N}$.
- 21) Aplicando la fórmula de Moivre para $n = 4$ obtén una fórmula para $\cos(4\alpha)$ en términos de $\cos \alpha$.
- 22) Calcula todas las raíces cúbicas de $4\sqrt{2}(1 + i)$ expresándolas en términos de senos y cosenos.