Apellidos y nombre: ....

.... DNI (o pasaporte): ....

- Solo hay que entregar esta hoja con las respuestas.
- A las 11:00 todos los exámenes deben estar entregados.

1) [3.5 puntos] Dada la función $f(x) = 5(x-2)e^x + 5 + \sqrt{4+8x^2}$, calcula $f'(0)$ y $f''(0)$ y escribe $T_2(f,0)(x)$, el polinomio de Taylor de orden 2 en $a = 0$.

La función es $f(x) = 5(x-2)e^x + 5 + 2(1+2x^2)^{1/2}$.
Por la derivada de un producto y la regla de la cadena,

$$f'(x) = 5e^x + 5(x-2)e^x + 2\cdot\frac{1}{2}\cdot(1+2x^2)^{-1/2}4x = 5(x-1)e^x + 4x(1+2x^2)^{-1/2}.$$

Derivando los dos productos,

$$f''(x) = 5e^x + 5(x-1)e^x + 4(1+2x^2)^{-1/2} - 2x(1+2x^2)^{-3/2}4x.$$

Así pues, $f(0) = -3$, $f'(0) = -5$ y $f''(0) = 4$. Por tanto,

$$T_2(f,0)(x) = -3 - \frac{5}{1!}x + \frac{4}{2!}x^2 = -3 - 5x + 2x^2.$$

Observación: Utilizando $e^x = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \dots$ y $\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x \dots$, donde los puntos suspensivos indican términos de orden superior, con los métodos del último capítulo se llega a la solución con muy pocos cálculos.

---

2) [3.5 puntos] Halla el área bajo la gráfica de $f(x) = \left(7+\sqrt{x}\right)^{-1}$ y sobre el eje x en el intervalo $[0,4]$.

La función es obviamente positiva, entonces tenemos que calcular su integral entre 0 y 4. Para ello, el cambio más natural es $x = t^2$ que da lugar a $dx = 2t\,dt$ y corresponde a $t = \sqrt{x}$. Con esto,

$$A = \int_0^4 \frac{dx}{7+\sqrt{x}} = \int_{\sqrt{0}}^{\sqrt{4}} \frac{2t\,dt}{7+t} = 2\int_0^2 \Big(1 - \frac{7}{7+t}\Big)\,dt$$

porque $t/(7+t) = 1 - 7/(7+t)$. La última integral es inmediata:

$$A = 2\big(t - 7\log|7+t|\big)\Big|_0^2 = 4 - 14\log 9 + 14\log 7.$$

Observación: El cambio $t = 7+\sqrt{x}$ es menos obvio, pero lleva algo más rápido a la solución.

---

3) [1.5 puntos por acierto, -1 fallo, 0 blanco] Indica si es verdadero o falso.

V. ■ F. □ El radio de convergencia de $\sum_{n=0}^{\infty}(2+3i)(4^n+5^n)^{-1}z^n$ es 5.

V. ■ F. □ El mínimo valor que alcanza $f(x) = |\operatorname{sen}(\pi x)| + \frac{1}{2}x$ en $[-2,4]$ es -1.

El radio de convergencia es el inverso de $\lim |a_n|^{1/n}$. Como $|2+3i|^{1/n} \to |2+3i|^0 = 1$, el límite es $\lim(4^n+5^n)^{-1/n} = 5^{-1}\lim\big((4/5)^n+1\big)^{-1/n} = 5^{-1}$ porque $(4/5)^n \to 0$. En el segundo apartado, $f(x) \ge \frac{1}{2}x$, porque el valor absoluto es siempre no negativo. Entonces se tiene $f(x) \ge \frac{1}{2}(-2) = -1 = f(-2)$.

Apellidos y nombre: ....

.... DNI (o pasaporte): ....

- Solo hay que entregar esta hoja con las respuestas.
- A las 11:00 todos los exámenes deben estar entregados.

1) [3.5 puntos] Halla el área bajo la gráfica de $f(x) = \big(5 + \sqrt{x}\big)^{-1}$ y sobre el eje x en el intervalo $[0, 4]$.

La función es obviamente positiva, entonces tenemos que calcular su integral entre 0 y 4. Para ello, el cambio más natural es $x = t^2$ que da lugar a $dx = 2t\,dt$ y corresponde a $t = \sqrt{x}$. Con esto,

$$A = \int_0^4 \frac{dx}{5 + \sqrt{x}} = \int_{\sqrt{0}}^{\sqrt{4}} \frac{2t\,dt}{5 + t} = 2\int_0^2 \Big(1 - \frac{5}{5 + t}\Big)\,dt$$

porque $t/(5 + t) = 1 - 5/(5 + t)$. La última integral es inmediata:

$$A = 2\big(t - 5\log|5 + t|\big)\Big|_0^2 = 4 - 10\log 7 + 10\log 5.$$

Observación: El cambio $t = 5 + \sqrt{x}$ es menos obvio, pero lleva algo más rápido a la solución.

---

2) [3.5 puntos] Dada la función $f(x) = 3(x-2)e^x + 3 + \sqrt{4+8x^2}$, calcula $f'(0)$ y $f''(0)$ y escribe $T_2(f,0)(x)$, el polinomio de Taylor de orden 2 en $a = 0$.

La función es $f(x) = 3(x-2)e^x + 3 + 2(1+2x^2)^{1/2}$.
Por la derivada de un producto y la regla de la cadena,

$$f'(x) = 3e^x + 3(x-2)e^x + 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot (1+2x^2)^{-1/2} 4x = 3(x-1)e^x + 4x(1+2x^2)^{-1/2}.$$

Derivando los dos productos,

$$f''(x) = 3e^x + 3(x-1)e^x + 4(1+2x^2)^{-1/2} - 2x(1+2x^2)^{-3/2} 4x.$$

Así pues, $f(0) = -1$, $f'(0) = -3$ y $f''(0) = 4$. Por tanto,

$$T_2(f,0)(x) = -1 - \frac{3}{1!}x + \frac{4}{2!}x^2 = -1 - 3x + 2x^2.$$

Observación: Utilizando $e^x = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \dots$ y $\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x \dots$, donde los puntos suspensivos indican términos de orden superior, con los métodos del último capítulo se llega a la solución con muy pocos cálculos.

---

3) [1.5 puntos por acierto, -1 fallo, 0 blanco] Indica si es verdadero o falso.

V. ■ F. □ El radio de convergencia de $\sum_{n=0}^{\infty}(2+3i)(4^n+5^n)^{-1}z^n$ es 5.

V. ■ F. □ El mínimo valor que alcanza $f(x) = |\operatorname{sen}(\pi x)| + \frac{1}{2}x$ en $[-2,4]$ es -1.

El radio de convergencia es el inverso de $\lim |a_n|^{1/n}$. Como $|2+3i|^{1/n} \to |2+3i|^0 = 1$, el límite es $\lim(4^n+5^n)^{-1/n} = 5^{-1} \lim \big((4/5)^n+1\big)^{-1/n} = 5^{-1}$ porque $(4/5)^n \to 0$. En el segundo apartado, $f(x) \ge \frac{1}{2}x$, porque el valor absoluto es siempre no negativo. Entonces se tiene $f(x) \ge \frac{1}{2}(-2) = -1 = f(-2)$.

Apellidos y nombre: ....

.... DNI (o pasaporte): ....

- Solo hay que entregar esta hoja con las respuestas.
- A las 11:00 todos los exámenes deben estar entregados.

1) [3.5 puntos] Dada la función $f(x) = 4(x-2)e^x + 4 + \sqrt{4+8x^2}$, calcula $f'(0)$ y $f''(0)$ y escribe $T_2(f,0)(x)$, el polinomio de Taylor de orden 2 en $a = 0$.

La función es $f(x) = 4(x-2)e^x + 4 + 2(1+2x^2)^{1/2}$.
Por la derivada de un producto y la regla de la cadena,

$$f'(x) = 4e^x + 4(x-2)e^x + 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot (1+2x^2)^{-1/2}4x = 4(x-1)e^x + 4x(1+2x^2)^{-1/2}.$$

Derivando los dos productos,

$$f''(x) = 4e^x + 4(x-1)e^x + 4(1+2x^2)^{-1/2} - 2x(1+2x^2)^{-3/2}4x.$$

Así pues, $f(0) = -2$, $f'(0) = -4$ y $f''(0) = 4$. Por tanto,

$$T_2(f,0)(x) = -2 - \frac{4}{1!}x + \frac{4}{2!}x^2 = -2 - 4x + 2x^2.$$

Observación: Utilizando $e^x = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \dots$ y $\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x \dots$, donde los puntos suspensivos indican términos de orden superior, con los métodos del último capítulo se llega a la solución con muy pocos cálculos.

---

2) [3.5 puntos] Halla el área bajo la gráfica de $f(x) = \big(3+\sqrt{x}\big)^{-1}$ y sobre el eje x en el intervalo $[0,4]$.

La función es obviamente positiva, entonces tenemos que calcular su integral entre 0 y 4. Para ello, el cambio más natural es $x = t^2$ que da lugar a $dx = 2t\,dt$ y corresponde a $t = \sqrt{x}$. Con esto,

$$A = \int_0^4 \frac{dx}{3+\sqrt{x}} = \int_{\sqrt{0}}^{\sqrt{4}} \frac{2t\,dt}{3+t} = 2\int_0^2 \Big(1 - \frac{3}{3+t}\Big)\,dt$$

porque $t/(3+t) = 1 - 3/(3+t)$. La última integral es inmediata:

$$A = 2\big(t - 3\log|3+t|\big)\Big|_0^2 = 4 - 6\log 5 + 6\log 3.$$

Observación: El cambio $t = 3+\sqrt{x}$ es menos obvio, pero lleva algo más rápido a la solución.

---

3) [1.5 puntos por acierto, -1 fallo, 0 blanco] Indica si es verdadero o falso.

V. ■ F. □ El radio de convergencia de $\sum_{n=0}^{\infty}(2+3i)(4^n+5^n)^{-1}z^n$ es 5.

V. ■ F. □ El mínimo valor que alcanza $f(x) = |\operatorname{sen}(\pi x)| + \frac{1}{2}x$ en $[-2,4]$ es -1.

El radio de convergencia es el inverso de $\lim |a_n|^{1/n}$. Como $|2+3i|^{1/n} \to |2+3i|^0 = 1$, el límite es $\lim(4^n+5^n)^{-1/n} = 5^{-1}\lim\big((4/5)^n+1\big)^{-1/n} = 5^{-1}$ porque $(4/5)^n \to 0$. En el segundo apartado, $f(x) \ge \frac{1}{2}x$, porque el valor absoluto es siempre no negativo. Entonces se tiene $f(x) \ge \frac{1}{2}(-2) = -1 = f(-2)$.

Apellidos y nombre: ....

.... DNI (o pasaporte): ....

- Solo hay que entregar esta hoja con las respuestas.
- A las 11:00 todos los exámenes deben estar entregados.

1) [3.5 puntos] Halla el área bajo la gráfica de $f(x) = \big(2 + \sqrt{x}\big)^{-1}$ y sobre el eje x en el intervalo $[0, 4]$.

La función es obviamente positiva, entonces tenemos que calcular su integral entre 0 y 4. Para ello, el cambio más natural es $x = t^2$ que da lugar a $dx = 2t\,dt$ y corresponde a $t = \sqrt{x}$. Con esto,

$$A = \int_0^4 \frac{dx}{2+\sqrt{x}} = \int_{\sqrt{0}}^{\sqrt{4}} \frac{2t\,dt}{2+t} = 2\int_0^2 \Big(1 - \frac{2}{2+t}\Big)\,dt$$

porque $t/(2+t) = 1 - 2/(2+t)$. La última integral es inmediata:

$$A = 2\big(t - 2\log|2+t|\big)\Big|_0^2 = 4 - 4\log 4 + 4\log 2.$$

Observación: El cambio $t = 2 + \sqrt{x}$ es menos obvio, pero lleva algo más rápido a la solución.

---

2) [3.5 puntos] Dada la función $f(x) = 7(x-2)e^x + 7 + \sqrt{4+8x^2}$, calcula $f'(0)$ y $f''(0)$ y escribe $T_2(f,0)(x)$, el polinomio de Taylor de orden 2 en $a=0$.

La función es $f(x) = 7(x-2)e^x + 7 + 2(1+2x^2)^{1/2}$.
Por la derivada de un producto y la regla de la cadena,

$$f'(x) = 7e^x + 7(x-2)e^x + 2\cdot\frac{1}{2}\cdot(1+2x^2)^{-1/2}4x = 7(x-1)e^x + 4x(1+2x^2)^{-1/2}.$$

Derivando los dos productos,

$$f''(x) = 7e^x + 7(x-1)e^x + 4(1+2x^2)^{-1/2} - 2x(1+2x^2)^{-3/2}4x.$$

Así pues, $f(0) = -5$, $f'(0) = -7$ y $f''(0) = 4$. Por tanto,

$$T_2(f,0)(x) = -5 - \frac{7}{1!}x + \frac{4}{2!}x^2 = -5 - 7x + 2x^2.$$

Observación: Utilizando $e^x = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \dots$ y $\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x \dots$, donde los puntos suspensivos indican términos de orden superior, con los métodos del último capítulo se llega a la solución con muy pocos cálculos.

---

3) [1.5 puntos por acierto, -1 fallo, 0 blanco] Indica si es verdadero o falso.

V. ■ F. □ El radio de convergencia de $\sum_{n=0}^{\infty}(2+3i)(4^n+5^n)^{-1}z^n$ es 5.

V. ■ F. □ El mínimo valor que alcanza $f(x) = |\operatorname{sen}(\pi x)| + \frac{1}{2}x$ en $[-2,4]$ es -1.

El radio de convergencia es el inverso de $\lim |a_n|^{1/n}$. Como $|2+3i|^{1/n} \to |2+3i|^0 = 1$, el límite es $\lim(4^n+5^n)^{-1/n} = 5^{-1}\lim\big((4/5)^n+1\big)^{-1/n} = 5^{-1}$ porque $(4/5)^n \to 0$. En el segundo apartado, $f(x) \ge \frac{1}{2}x$, porque el valor absoluto es siempre no negativo. Entonces se tiene $f(x) \ge \frac{1}{2}(-2) = -1 = f(-2)$.
