Apellidos y nombre: ....

.... DNI (o pasaporte): ....

- Debes escribir un razonamiento válido que conduzca al resultado final, excepto en el último ejercicio en el que no es necesario añadir justificaciones, solo marcar las soluciones en esta hoja.
- Como es habitual, log indica el logaritmo neperiano.
- A las 13:00 todos los exámenes deben estar entregados.

---

1) [1.5 puntos] Calcula el valor exacto de $(i-1)^8+(1-i)^8$.

El módulo de $1-i$ es $\sqrt{2}$ y su argumento $-\pi/4$, por tanto $(1-i)^8 = \big(\sqrt{2}e^{-i\pi/4}\big)^8 = 2^{8/2}e^{-2\pi i} = 2^4 = 16$. Por otro lado, $(i-1)^8 = (-1)^8(1-i)^8 = (1-i)^8$. Así pues, la expresión del enunciado es $2\cdot 16 = 32$.

---

2) [1.5 puntos] Decide si la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n)!}{5^n(n!)^2}$ converge.

Aplicamos el criterio del cociente con $a_n = \frac{(2n)!}{5^n(n!)^2}$. Usando la definición del factorial, $(2n+2)! = (2n+2)(2n+1)(2n)!$ y $(n+1)! = (n+1)n!$, por tanto

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(2n+2)!}{5^{n+1}\big((n+1)!\big)^2 a_n} = \frac{(2n+2)(2n+1)(2n)!}{5\cdot 5^n(n+1)^2(n!)^2 a_n} = \frac{(2n+2)(2n+1)}{5(n+1)^2} = \frac{2(2n+1)}{5(n+1)}.$$

Tomando límites,

$$\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim \frac{4n+2}{5n+5} = \lim \frac{4+2/n}{5+5/n} = \frac{4}{5}.$$

Según el criterio del cociente, la serie converge porque el resultado del límite es menor que 1.

---

3) [1.5 puntos] Estudia razonadamente la continuidad de la siguiente función en $\mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\operatorname{sen}^2(x^2)}{x^2} & \text{si } x < 0, \\ 0 & \text{si } x = 0, \\ e^{-1/x^2} & \text{si } 0 < x \le 1, \\ \left(\frac{x+1}{3x-1}\right)^{1/(x-1)} & \text{si } x > 1. \end{cases}$$

Las funciones que definen f en los intervalos $(-\infty, 0)$, $(0, 1)$ y $(1, \infty)$ son continuas en ellos, por ser funciones elementales sin singularidades. Por consiguiente, para deducir que f es continua en todo $\mathbb{R}$ hay que comprobar que los límites laterales en $x = 0$ y $x = 1$ (situados en las fronteras de estos intervalos) existen y coinciden con el valor de la función.

En $x = 0$, por la segunda definición, $f(0) = 0$. Por otro lado, la primera y la tercera implican

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \Big(\frac{\operatorname{sen}(x^2)}{x}\Big)^2 = \Big(\lim_{x\to 0^-} \frac{\operatorname{sen}(x^2)}{x}\Big)^2 \underset{\text{L'H}}{=} \Big(\lim_{x\to 0^-} \frac{2x\cos(x^2)}{1}\Big)^2 = 0$$

y

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} e^{-1/x^2} = 0$$

porque $-1/x^2 \to -\infty$. Por tanto, $\lim_{x\to 0} f(x) = 0 = f(0)$ y f es continua en $x = 0$.

En $x = 1$, la tercera definición asegura $f(1) = e^{-1}$ y también trivialmente $\lim_{x\to 1^-} f(x) = e^{-1}$, ya que no hay indeterminación. Queda calcular el límite por la derecha con la cuarta definición. Utilizamos la fórmula $\lim g(x)^{h(x)} = e^{\lim \left(g(x)-1\right)h(x)}$ válida para indeterminaciones del tipo 1^∞, que es nuestro caso:

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} \Big(\frac{x+1}{3x-1}\Big)^{1/(x-1)} = e^{\lim_{x\to 1^+} \left(\frac{x+1}{3x-1}-1\right)\frac{1}{x-1}} = e^{\lim_{x\to 1^+} \frac{-2x+2}{(3x-1)(x-1)}} = e^{-1}$$

donde en el último paso basta simplificar $x - 1$ y sustituir $x = 1$. Entonces $\lim_{x\to 1} f(x) = e^{-1} = f(1)$ y f también es continua en $x = 1$.

---

4) [1 punto] Halla la derivada de $f(x) = e^{2\log(x-23)}$ en $x = 2023$ tratando de simplificar el resultado lo más posible.

Simplificando f antes de derivar, $f(x) = \left(e^{\log(x-23)}\right)^2 = (x-23)^2$ porque la exponencial y el logaritmo son funciones inversas una de la otra. La derivada es $f'(x) = 2(x-23)$ y sustituyendo, $f'(2023) = 2(2023-23) = 4000$.

---

5) [1.5 puntos] Calcula el área limitada entre la gráfica de $f(x) = (1-x^2)e^x$ y el intervalo $[-1,1]$ del eje X.

Claramente la función es mayor o igual que cero en el intervalo indicado, por tanto el área es $A = \int_{-1}^{1}(1-x^2)e^x\,dx$. Tomando como partes $u = 1-x^2$, $dv = e^x, dx$, correspondientes a $du = -2x\,dx$, $v = e^x$, se obtiene

$$A = (1-x^2)e^x\Big|_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1}(-2x)e^x\,dx = \int_{-1}^{1} 2xe^x\,dx.$$

Una nueva integración por partes, eligiendo $u = 2x$, $dv = e^x\,dx$, implica

$$A = 2xe^x\Big|_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1} 2e^x\,dx = \big(2xe^x - 2e^x\big)\Big|_{-1}^{1} = (2e-2e) - \big(-2e^{-1} - 2e^{-1}\big),$$

por tanto el área buscada es $A = 4e^{-1}$.

---

6) [1 punto por acierto, -0.5 fallo, 0 blanco] Indica si es verdadero o falso.

V. ■ F. □ Toda función que satisface $0 \le f(x) \le x^2$ para todo $x \in \mathbb{R}$ cumple $f'(0) = 0$.

V. Para $x = 0$ se sigue $f(0) = 0$. Por la definición de derivada, $f'(0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(h)}{h}$ y, según la hipótesis, $0 \le |f(h)/h| \le |h|$. Por tanto el límite es nulo.

V. ■ F. □ El coeficiente de x^8 en el desarrollo de Taylor de $f(x) = \log\big(1+2x^2\big)$ alrededor del origen es -4.

V. Integrando en $\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - \dots$ (suma de una progresión geométrica), se obtiene $\log(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \dots$, que se vio en clase. Cambiando x por $2x^2$, el coeficiente de x^8 es $-2^4/4 = -4$.

V. □ F. ■ Toda sucesión positiva acotada superiormente por 1 es convergente.

F. Por ejemplo $a_n = \frac{1}{2} + \frac{(-1)^n}{4}$ explícitamente es $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = \frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \dots$ y no converge ya que oscila entre dos valores.

Criterios de corrección

A continuación se indican las bonificaciones y penalizaciones genéricas en cada problema y algunos comentarios sobre la solución.

1) El argumento de $i-1=-1+i$ es $3\pi/4$ como se deduce fácilmente de un dibujo (en grados sería 135°). Algunos parece que creéis que es $-\pi/4$ porque usáis la fórmula del arcotangente sin tener en cuenta que hay una ambigüedad de π en ella. No lo he penalizado porque me resulta difícil distinguir quién se está equivocando y quién está usando que $i-1=-(1-i)$ que implica que esta ambigüedad es irrelevante al elevar a potencias pares.

2) Los errores leves de cálculo descuentan en general 0,25. Dos personas han cambiado el enunciado al escribir al solución, resultado un problema algo más fácil, y les he descontado 0,5. Una cosa muy rara es comparar primero la serie con ella misma. El único propósito de la comparación es pasar de una serie a otra más simple. Debería resultar obvio que quedarse con la misma no requiere ningún razonamiento.

3) Había cuatro límites laterales que calcular. Cada uno de ellos cuenta 0,25. El 0,5 restante viene del esquema del razonamiento y su coherencia, independientemente de posibles errores en los límites. He decidido no penalizar no indicar $\lim_{x\to 0} f(x)=f(0)$ y $\lim_{x\to 1} f(x)=f(1)$, que es lo que garantiza la continuidad (en lugar de la mera existencia de los límites), porque quizá os resultaba obvio.

4) No simplificar el resultado descuenta 0,25.

5) Los errores leves de cálculo descuentan en general 0,25. Es mejor escribir $4/e$ o $4e^{-1}$ que el valor con unos cuantos decimales sacados da la calculadora, porque este no es exacto en sentido matemático. No obstante, no penaliza.

6) Si habéis respondido a los tres apartados, con dos o tres errores la puntuación es cero.