Apellidos y nombre: ....

.... DNI (o pasaporte): ....

- Debes escribir un razonamiento válido que conduzca al resultado final, excepto en el último ejercicio en el que no es necesario añadir justificaciones.
- Marca las respuestas V/F de **6)** en esta página y escribe tus soluciones de **1)**–**5)** en los huecos reservados en las siguientes páginas.
- A las 13:00 todos los exámenes deben estar entregados.

1) [1.5 puntos] Calcula el valor exacto de $(1+i)^9+(1-i)^9$.

El módulo de $1+i$ es $\sqrt{2}$ y su argumento $\pi/4$, por tanto

$$(1+i)^9=\left(\sqrt{2}e^{i\pi/4}\right)^9=2^{9/2}e^{9i\pi/4}=2^{9/2}\Big(\cos\frac{9\pi}{4}+i\,\mathrm{sen}\,\frac{9\pi}{4}\Big)=2^{9/2}\Big(\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{i}{\sqrt{2}}\Big).$$

Como $(1-i)^9$ es el conjugado de $(1+i)^9$, las partes imaginarias se cancelan al sumar y resulta

$$\frac{2^{9/2}}{\sqrt{2}}+\frac{2^{9/2}}{\sqrt{2}}=2^4+2^4=32.$$

2) [1.5 puntos] Decide si la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^2}{(2n)!+1}$ converge.

Sean $a_n=\frac{(n!)^2}{(2n)!+1}$ y $b_n=\frac{(n!)^2}{(2n)!}$. Se cumple

$$\text{lím}\,\frac{a_n}{b_n}=\text{lím}\,\frac{(2n)!}{(2n)!+1}=\text{lím}\,\frac{1}{1+1/(2n)!}=\frac{1}{1+0}=1.$$

El criterio de comparación asegura que $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ y $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ tienen el mismo carácter. Apliquemos a la segunda serie el criterio del cociente. Para ello, calculamos

$$\text{lím}\,\frac{b_{n+1}}{b_n}=\text{lím}\,\frac{\big((n+1)!\big)^2(2n)!}{(n!)^2(2n+2)!}=\text{lím}\,\frac{\big(n!\cdot(n+1)\big)^2(2n)!}{(n!)^2(2n)!\cdot(2n+1)(2n+2)}.$$

Los factoriales se cancelan en la última expresión y resulta

$$\lim \frac{b_{n+1}}{b_n} = \lim \frac{(n+1)^2}{(2n+1)(2n+2)} = \lim \frac{n+1}{2(2n+1)} = \lim \frac{1+1/n}{2(2+1/n)} = \frac{1}{4}.$$

Según el criterio del cociente, la serie converge porque es menor que 1.

---

3) [1.5 puntos] Considera $f(x) = \dfrac{e^{1/x} - e^{4/x}\cos x}{e^{4/x}+1}$. Calcula $\lim_{x\to 0^+} f(x)$, $\lim_{x\to 0^-} f(x)$ y estudia si la función definida por $g(x) = \operatorname{sen}\big(\pi f(x)\big)$ si $x \neq 0$ y $g(0) = 0$ es continua en $x = 0$.

Se tiene $\lim_{x\to 0^-} e^{1/x} = 0$ porque $1/x \to -\infty$. Entonces

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{e^{1/x} - e^{4/x}\cos x}{e^{4/x}+1} = \frac{0 - 0\cdot 1}{0+1} = 0.$$

De la misma forma, $\lim_{x\to 0^+} e^{-1/x} = 0$ porque $-1/x \to -\infty$ y se tiene, dividiendo por $e^{4/x}$,

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{e^{1/x} - e^{4/x}\cos x}{e^{4/x}+1} = \lim_{x\to 0^+} \frac{e^{-3/x} - \cos x}{1 + e^{-4/x}} = \frac{0-1}{1+0} = -1.$$

Según lo anterior,

$$\lim_{x\to 0^-} g(x) = \operatorname{sen}(\pi\cdot 0) = \operatorname{sen} 0 = 0 \qquad \text{y} \qquad \lim_{x\to 0^+} g(x) = \operatorname{sen}(-\pi\cdot 1) = \operatorname{sen}(-\pi) = 0$$

Como ambos coinciden, $\lim_{x\to 0} g(x)$ existe y es nulo. Además, $g(0) = \lim_{x\to 0} g(x)$, por tanto g es continua en $x = 0$.

---

4) [1.5 puntos] Halla la derivada de $f(x) = (2x+1)^{\cos(2x)}$.

Se tiene $f(x) = e^{\cos(2x)\log(2x+1)}$ porque $2x+1 = e^{\log(2x+1)}$. Esto es una composición de e^x, cuya derivada es ella misma, y de la función que aparece en el exponente, que se deriva como un producto. Por la regla de la cadena,

$$f'(x) = e^{\cos(2x)\log(2x+1)}\Big(-2\operatorname{sen}(2x)\log(2x+1) + \frac{2}{2x+1}\cos(2x)\Big).$$

---

5) [1.5 puntos] Calcula la integral $\displaystyle\int_0^1 (x^2-1)e^x\,dx$.

Tomando como partes $u = x^2 - 1$, $dv = e^x, dx$, correspondientes a $du = 2x\,dx$, $v = e^x$, se tiene que la integral del enunciado es

$$(x^2-1)e^x\Big|_0^1 - I = 1 - I \qquad \text{con} \quad I = \int_0^1 2xe^x\,dx.$$

Una nueva integración por partes eligiendo $u = 2x$, $dv = e^x\,dx$, con $du = 2\,dx$, $v = e^x$, lleva a

$$I = 2xe^x\Big|_0^1 - \int_0^1 2e^x\,dx = 2e - \big(2e^x\big)\Big|_0^1 = 2.$$

En definitiva, la solución es $1 - I = 1 - 2 = -1$.

---

6) [1.25 puntos por acierto, -0.75 fallo, 0 blanco] Indica si es verdadero o falso.

V. ☐ F. ☐ El coeficiente de x^4 en el desarrollo de Taylor de $f(x) = \log(1-2x)$ alrededor del origen es -4.

V. Integrando y cambiando el signo en $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots$ (suma de una progresión geométrica), se obtiene $\log(1-x) = -x - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \dots$ (visto en clase). Sustituyendo x por $2x$, el coeficiente de x^4 es $-2^4/4 = -4$.

V. ☐ F. ☐ El conjunto dado por la imagen de $f(x) = \big(1-e^{-x^2}\big)\cos(x^2)$ tiene supremo, pero no máximo.

V. El conjunto está acotado por 1 porque $0 \le 1 - e^{-x^2} < 1$ y $-1 \le \cos(x^2) \le 1$. En particular tiene supremo y de hecho es 1 porque $f\big(\sqrt{2\pi n}\big) \to 1$ con $n \in \mathbb{Z}^+$, $n \to +\infty$. No es máximo porque $f(x) = 1$ es imposible ya que $1 - e^{-x^2} < 1$ y, consecuentemente, $f(x) < 1$.
