1. Números raros. En el colegio aprendimos los números naturales $\mathbb{N}$, los enteros $\mathbb{Z}$, los racionales $\mathbb{Q}$ y los reales $\mathbb{R}$, que engloban a todos los anteriores y son intuitivos. Las cosas raras empezaron con $\mathbb{C}$ porque pocos estudiantes encuentran sentido a $\sqrt{-1}$. Hay extensiones de los reales más raras todavía, como los cuaterniones:

$$\mathbb{H} = \langle 1, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k} \rangle_{\mathbb{R}} \qquad \text{con} \quad \mathbf{i}^2 = \mathbf{j}^2 = \mathbf{k}^2 = \mathbf{ijk} = -1.$$

El resto de los productos se deduce de la asociativa y la distributiva.

En general, se llaman *números hipercomplejos* a "números" que incluyen a los reales y que guardan unas propiedades básicas. Si no te asustan las palabrotas matemáticas, reciben este nombre cuando forman un álgebra con unidad de dimensión finita sobre $\mathbb{R}$. Un buen libro acerca de ellos es:

KANTOR, I. L. AND SOLODOVNIKOV, A. S. Hypercomplex numbers. *An elementary introduction to algebras.* Springer-Verlag, 1989. `MR#996029`.

Por muy raros que sean los números hipercomplejos $\mathcal{H}$ que te inventes para extender $\mathbb{R}$, si $(\mathcal{H}, \cdot)$ es asociativo se prueba que $\mathcal{H}$ equivale a un subconjunto de matrices cuadradas. Por ejemplo, en el caso de $\mathbb{C}$, asignando

$$a + bi \longrightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$$

se tiene un isomorfismo

$$\mathbb{C} \longleftrightarrow \mathfrak{M} = \left\{ A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \;:\; A + A^t = 2a_{11} I \right\}.$$

Es decir, sumar o multiplicar números o complejos es lo mismo que sumar o multiplicar matrices 2×2 de esta forma. Sería posible erradicar $\mathbb{C}$ de todos los libros de matemáticas sustituyéndolo por $\mathfrak{M}$, aunque no sería muy sano.

2. ¿Y esto para qué sirve? Curiosamente, los físicos teóricos suelen utilizar más números hipercomplejos que los matemáticos en su investigación habitual. Estas aplicaciones físicas son bastante abstrusas. Más sencillo es el uso de los cuaterniones en el mundo de la animación con ordenador. Si a cada vector $\vec{v} \in \mathbb{R}^3$ le asignamos $H(\vec{v}) = v_1\mathbf{i} + v_2\mathbf{j} + v_3\mathbf{k}$, que es un elemento de $\mathbb{H}$, se cumple la relación:

$$H\left(\mathsf{rot}(\alpha, \vec{n})\vec{v}\right) = qH(\vec{v})q^{-1} \qquad \text{donde} \quad q = \cos\frac{\alpha}{2} + H(\vec{n})\sin\frac{\alpha}{2}.$$

Aquí $\mathsf{rot}(\alpha, \vec{n})$ representa la rotación de ángulo α por el eje unitario $\vec{n}$. Con la fórmula anterior es muy fácil interpolar rotaciones que corresponden a diferentes cuadros (*frames*) de la animación. También elimina la posibilidad de colapso en ciertas coordenadas naturales, llamado en la jerga *gimbal lock*.