La *ecuación de Schrödinger* para una partícula de masa m es:

$$i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t} = \left(-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + V\right)\Psi$$

donde V es la energía potencial y $\hbar$ es la constante de Planck h dividida por 2π. Para $V = 0$ las soluciones son superposiciones de ondas $e^{i(\vec{p}\cdot\vec{x}-Et)/\hbar}$ cuya frecuencia angular y número de ondas son $E/\hbar$ y $p/\hbar$, lo cual produce las relaciones $E = h\nu$ y $\lambda = h/p$. Quizá estas sean las dos fórmulas más famosas de la mecánica cuántica.

En realidad, Schrödinger estaba buscando una ecuación relativista basada en $E = \sqrt{\|\vec{p}\|^2c^2 + m^2c^4}$, que para $\vec{p} = \vec{0}$ da $E = mc^2$, pero no tuvo éxito. Dirac lo resolvió con un artificio matemático espectacular, introduciendo números no conmutativos que generalizan a los cuaterniones para factorizar cierta expresión. Así obtuvo la *ecuación de Dirac*:

$$\big(i\gamma^\mu\partial_\mu - m\big)\Psi = 0.$$

Esta es la ecuación relativista para electrones libres. En un sentido que es difícil de precisar matemáticamente, se cumple

$$\lim_{v/c\to 0}(\text{ec. Dirac}) = (\text{ec. Schrödinger con } V = 0).$$

En la ecuación de Dirac, Ψ no es ya una onda sino un vector, o más bien un espinor, de 4 coordenadas y los coeficientes γ^μ son las matrices por bloques

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} I & O \\ O & -I \end{pmatrix} \qquad \text{y} \qquad \gamma^j = \begin{pmatrix} O & \sigma_j \\ -\sigma_j & O \end{pmatrix} \qquad \text{con} \quad j = 1, 2, 3$$

donde σ_j denotan las *matrices de Pauli*, unas matrices 2×2 que generan un álgebra isomorfa a la de los cuaterniones.

Los físicos escriben las soluciones básicas de la ecuación para espín σ en la forma

$$\sqrt{\frac{m}{E(\vec{p})}}u(\vec{p},\sigma)e^{-ip\cdot x} \qquad \text{y} \qquad \sqrt{\frac{m}{E(\vec{p})}}v(\vec{p},\sigma)e^{ip\cdot x}.$$

El hecho que haya dos tipos de soluciones llevó a conjeturar a Dirac que había una partícula pareja del electrón. Tiempo después se detectó. Es el *positrón*. Un punto importante de las soluciones normalizables de la ecuación de Dirac es que satisfacen la conservación de la probabilidad:

$$\frac{d}{dt}\int \|\Psi\|^2 = \int \left(\frac{\partial\Psi^*}{\partial t}\Psi + \Psi^*\frac{\partial\Psi}{\partial t}\right) = 0.$$

En muchos cálculos físicos hay que invertir las matrices γ^μ. Esto admite una fórmula trivial pero si quisiéramos poner como ejercicio en primero de grado invertir γ^3, podríamos pedir aplicar reducción de Gauss-Jordan a

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$