Capítulo 5

Teoría espectral

5.1. Autovalores y autovectores

En un espacio vectorial V de dimensión finita n, una vez fijada una base, un endomorfismo $f : V \longrightarrow V$ viene determinado por una matriz $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, esto es, por n^2 números. En algunas aplicaciones se produce una simplificación considerable cuando A es diagonal y por tanto determinada solo por n números. Sin conocer siquiera esas aplicaciones, suena creíble que sea un objetivo deseable si pensamos en que un sistema lineal de ecuaciones con matriz diagonal es trivial, porque todas las ecuaciones están desacopladas. De la misma forma, un endomorfismo con matriz diagonal en n dimensiones se desacopla en n endomorfismos en dimensión 1 tan tontos como multiplicar por un número. La *teoría espectral* estudia cuándo tal desacople es posible, incluso en el contexto de dimensión infinita, mucho más difícil, que excede a este curso.

Nos preguntamos, por tanto, si existe alguna base en la que la matriz de un endomorfismo dado f sea diagonal y en ese caso diremos que es f es *diagonalizable*.

El hecho de que exista una base $\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n\}$ en la que nuestro endomorfismo f se *diagonalice*, esto es, adquiera una matriz diagonal, quiere decir que al utilizar coordenadas $\vec{x}$ en dicha base

$$\vec{x} \overset{f}{\longmapsto} D\vec{x} \qquad \text{con} \quad D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}. \tag{5.1}$$

Escrito de otro modo, $f(\vec{v}_j) = \lambda_j \vec{v}_j$. Asignemos nombres a esta situación: Dado un espacio vectorial V sobre K y un endomorfismo $f : V \longrightarrow V$, se dice que $\vec{v} \in V - \{\vec{0}\}$ es un *vector propio* o *autovector* si $f(\vec{v}) = \lambda\vec{v}$ para algún $\lambda \in K$. A este λ se le llama *valor propio* o *autovalor*.

Un pequeño abuso denotación muy habitual, que no evitaremos en este capítulo, es hablar de los vectores y valores propios de una matriz cuadrada $A \in \mathcal{M}_n(K)$, suponiendo que uno se refiere a los del endomorfismo de K^n dado por $f(\vec{x}) = A\vec{x}$ en la base canónica. De la misma manera, se dice que A es *diagonalizable* si existe una base $\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n\}$, necesariamente formada por autovectores, en la que $f(\vec{x}) = A\vec{x}$ adquiere una matriz diagonal. Según lo que sabemos de cambios de base, si C es la matriz cuyas columnas son las coordenadas de los $\vec{v}_j$ en la base canónica (o en la que esté referida A), entonces

$$C^{-1}AC = D \tag{5.2}$$

para D como en (5.1) y $A\vec{v}_j = \lambda_j \vec{v}_j$.

Si conocemos un valor propio λ, hallar los vectores propios correspondientes equivale a resolver $f(\vec{x}) = \lambda\vec{x}$ lo cual, como casi todo en este curso, se reduce a un sistema de ecuaciones lineales. Por ser más concretos, si $f(\vec{x}) = A\vec{x}$ y λ es autovalor, los autovectores respectivos son las soluciones no nulas de

$$(A - \lambda I)\vec{x} = \vec{0}. \tag{5.3}$$

Desde un punto de vista más teórico, lo autovectores correspondientes a λ son los vectores no nulos de $\operatorname{Ker}(f - \lambda \operatorname{Id})$ con Id el endomorfismo identidad (el que deja todo fijo). A este núcleo se llama *autoespacio* de λ.

El problema es entonces encontrar un método para hallar los valores propios. El siguiente resultado lo traduce en resolver una ecuación algebraica.

Proposición 5.1.1. *Dado un espacio vectorial V sobre K de dimensión finita y un endomorfismo f, se tiene que $\lambda \in K$ es autovalor si y solo si resuelve la ecuación* $\det(A - \lambda I) = 0$ *donde A es la matriz de f en una base fijada.*

Por supuesto lo habitual es usar la base canónica. La ecuación $\det(A - \lambda I) = 0$ se denomina *ecuación característica* y $\det(A - \lambda I)$ *polinomio característico*. Es fácil convencerse de que realmente es un polinomio y de que su grado es $\dim V$.

Demostración. La condición necesaria y suficiente para que $\lambda \in K$ sea autovalor es que existan autovectores respectivos, esto es, $\operatorname{Ker}(f - \lambda \operatorname{Id}) \neq \{\vec{0}\}$. Dicho de otro modo, que el sistema homogéneo (5.3) tenga solución no trivial, lo que equivale a que el rango de $A - \lambda I$ sea menor que el número de incógnitas (por el Teorema 1.2.2) y esto a que su determinante sea no nulo (por el Teorema 3.3.4). $\square$

Por ejemplo, estudiemos si es diagonalizable el endomorfismo $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ definido por

$$f(\vec{x}) = A\vec{x} \qquad \text{con} \quad A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Primero hallamos el polinomio característico:

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 2 \\ 1 & 4-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)(4-\lambda) - 2 = \lambda^2 - 7\lambda + 10.$$

Al resolver $\lambda^2 - 7\lambda + 10 = 0$ obtenemos los autovalores $\lambda_1 = 2$ y $\lambda_2 = 5$. Para $\lambda_1 = 2$ los vectores propios son los $\vec{v} \in \mathbb{R}^2 - \{\vec{0}\}$ que satisfacen

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \vec{v} = \vec{0}, \qquad \text{lo que implica} \qquad \vec{v} = \mu \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \mu \neq 0.$$

De la misma manera, para $\lambda_2 = 5$ se tiene

$$\begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \vec{v} = \vec{0} \qquad \Longrightarrow \qquad \vec{v} = \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mu \neq 0.$$

Con ello hemos hallado todos los autovectores[1]. El endomorfismo f (o la matriz A) es diagonalizable ya que tenemos la base $\mathcal{B} = \big\{(2,-1)^t, (1,1)^t\big\}$ formada por autovectores. La comprobación es que, si cambiamos a la base $\mathcal{B}$, de acuerdo con (5.2),

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

Esta comprobación es poco eficiente desde el punto de vista computacional y todavía lo es menos en dimensión mayor (requiere más esfuerzo que repasar las cuentas). Si uno quiere confirmar que no se ha equivocado al obtener un autovector $\vec{v}_j$ correspondiente a λ_j, quizá lo más rápido sea comprobar la definición $A\vec{v}_j = \lambda_j \vec{v}_j$.

Aunque aquí lo eludiremos, es habitual abusar de la notación y restringir el nombre *autovectores* a los elementos de bases fijadas de los autoespacios. Así en el ejemplo anterior muchos dirían que $(2,-1)^t$ es "el" autovector correspondiente a $\lambda_1 = 2$ sobreentendiendo que el resto son múltiplos suyos. Por supuesto, hay ambigüedad en la posible base en la que se diagonaliza un endomorfismo.

Una ecuación polinómica sobre $\mathbb{C}$ siempre tiene raíces en $\mathbb{C}$ pero en $\mathbb{R}$ esto no es cierto en general. Así, el endomorfismo $f : K^2 \longrightarrow K^2$

$$f(\vec{x}) = A\vec{x} \qquad \text{con} \quad A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

no tiene autovalores (ni por tanto autovectores) cuando $K = \mathbb{R}$ porque la ecuación característica es $\lambda^2 + 1 = 0$, por tanto en este caso no es diagonalizable. Sin embargo, si $K = \mathbb{C}$, $\lambda_1 = i$ y $\lambda_2 = -i$ son vectores propios válidos y para λ_1

$$\begin{pmatrix} -i & -1 \\ 1 & -i \end{pmatrix} \vec{v} = \vec{0} \qquad \Longrightarrow \qquad \vec{v} = \mu \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mu \neq 0.$$

Mientras que para λ_2

$$\begin{pmatrix} i & -1 \\ 1 & i \end{pmatrix} \vec{v} = \vec{0} \qquad \Longrightarrow \qquad \vec{v} = \mu \begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mu \neq 0.$$

[1] Quizá te llame la atención que las columnas de $A - \lambda_1 I$ sean autovectores para λ_2 y las de $A - \lambda_2 I$ lo sean para λ_1. Esto es un hecho general del caso de dimensión 2 con $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Se deja al lector interesado que investigue la razón. No es fácil.

Por consiguiente f se diagonaliza en la base $\mathcal{B} = \{(i,1)^t, (-i,1)^t\}$. Para el que quiera practicar con el cálculo matricial con números complejos, es un ejercicio sencillo verificar

$$\begin{pmatrix} i & -i \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i & -i \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}.$$

Vemos entonces que un problema para que un endomorfismo $f : V \longrightarrow V$ no sea diagonalizable es que V sea un espacio vectorial sobre $K = \mathbb{R}$ y no haya suficientes autovalores. El problema podría persistir cuando $K = \mathbb{C}$ si hay raíces múltiples de la ecuación característica. La multiplicidad no depende de la base, es decir los polinomios característicos están asociados a los endomorfismos, más que a sus matrices. Esto es fácil pero no obvio.

Lema 5.1.2. *El polinomio característico no depende de la base elegida.*

Demostración. Si $A' = C^{-1}AC$

$$|A' - \lambda I| = |C^{-1}AC - \lambda C^{-1}C| = |C^{-1}||A - \lambda I||C| = |A - \lambda I|$$

donde se ha aplicado la propiedad multiplicativa de los determinantes. $\square$

Incluso si tenemos tantos autovalores como $\dim V$, cabe preguntarse si los autovectores respectivos gozan de la independencia lineal requerida para que sean parte de una base. El siguiente resultado asegura que sí.

Proposición 5.1.3. *Si $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n$ son autovectores de $f : V \longrightarrow V$ con autovalores distintos, entonces son linealmente independientes.*

Demostración. Supongamos que no lo fueran y llegaremos a una contradicción. Si uno de los vectores propios es combinación lineal de los otros, los podemos reordenar de forma que se tenga:

$$\vec{v}_1 = \mu_2\vec{v}_2 + \cdots + \mu_m\vec{v}_m \quad \text{con } \mu_j \neq 0.$$

Además, consideraremos que m es lo menor posible. Si λ_j es el autovalor que corresponde a $\vec{v}_j$ entonces para $m > 2$

$$\vec{v}_1 = \frac{f(\vec{v}_1) - \lambda_m\vec{v}_1}{\lambda_1 - \lambda_m} = \mu_2\frac{\lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_m}\vec{v}_2 + \cdots + \mu_{m-1}\frac{\lambda_{m-1}}{\lambda_1 - \lambda_m}\vec{v}_{m-1},$$

lo que contradice que m sea mínimo. Si $m = 2$, el mismo argumento lleva a la contradicción $\vec{v}_1 = \vec{0}$. $\square$

Con esto ya estamos en condiciones de dar un resultado teórico que resuelve el problema que nos habíamos planteado.

Teorema 5.1.4. *Un endomorfismo $f : V \longrightarrow V$, con V de dimensión finita, es diagonalizable si y solo si*

$$\sum_{i=1}^{m} \dim \operatorname{Ker}(f - \lambda_i \mathrm{Id}) = \dim V$$

donde $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ son los autovalores (distintos) de f.

Esto no es nada más que escribir de manera abstracta la condición de que necesitamos suficientes autovectores para formar una base.

Demostración. Si $\mathcal{B}_i = \{\vec{v}_{i1}, \dots, \vec{v}_{id_i}\}$ es una base de $\operatorname{Ker}(f - \lambda_i \mathrm{Id})$, de dimensión d_i, entonces $\mathcal{B} = \bigcup_{i=1}^{m} \mathcal{B}_i$ consta de $\sum_{i=1}^{m} d_i$ elementos que son vectores propios linealmente independientes por la Proposición 5.1.3 (nótese que cualquier combinación lineal no nula de elementos de $\operatorname{Ker}(f - \lambda_i \mathrm{Id})$ es autovector correspondiente a λ_i), en particular $\sum_{i=1}^{m} d_i \le \dim V$. Si se da la igualdad, forman una base (Proposición 2.2.4) y entonces f es diagonalizable. Recíprocamente, si existe una base de autovectores, como cada uno está en algún $\operatorname{Ker}(f - \lambda_i \mathrm{Id})$, necesariamente se tiene la igualdad de dimensiones. □

Los núcleos anteriores son no triviales por definición de autovector y se tiene la consecuencia inmediata:

Corolario 5.1.5. *Dada $A \in \mathcal{M}_n(K)$ si $\det(A - \lambda I) = 0$ tiene n raíces distintas, entonces A es diagonalizable.*

Por ejemplo, si nos tomamos el trabajo de hacer los cálculos,

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -3 \\ 4 & 0 & 4 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \Longrightarrow \qquad |A - \lambda I| = -\lambda^3 + 4\lambda = -\lambda(\lambda^2 - 4).$$

Por tanto los autovalores son $\lambda = -2, 0, 2$ y la matriz A es diagonalizable.

El recíproco no es siempre cierto, puede haber raíces repetidas y suficientes autovectores. Un ejemplo muy tonto es $A = I \in \mathcal{M}_n(K)$ que tiene polinomio característico $(1 - \lambda)^n$ y por tanto un solo autovalor $\lambda = 1$. Sin embargo, todo vector no nulo es autovector porque $A\vec{v} = \vec{v}$. Consecuentemente, diagonaliza en cualquier base de K^n. Ahora veremos un ejemplo no trivial.

Consideremos $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ dado por

$$f(\vec{x}) = A\vec{x} \qquad \text{con} \quad A = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 2 \\ -6 & -5 & -3 \\ 6 & 6 & 4 \end{pmatrix}.$$

Tras algunos cálculos, obtenemos que el polinomio característico es

$$\begin{vmatrix} 5 - \lambda & 4 & 2 \\ -6 & -5 - \lambda & -3 \\ 6 & 6 & 4 - \lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 4\lambda^2 - 5\lambda + 2 = -(\lambda - 1)^2(\lambda - 2).$$

De esta forma, tenemos $\lambda_1 = 1$ (doble) y $\lambda_2 = 2$. Los rangos de $A - \lambda_1 I$ y de $A - \lambda_2 I$ son respectivamente

$$\operatorname{rg}\begin{pmatrix} 4 & 4 & 2 \\ -6 & -6 & -3 \\ 6 & 6 & 3 \end{pmatrix} = 1 \qquad \text{y} \qquad \operatorname{rg}\begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 \\ -6 & -7 & -3 \\ 6 & 6 & 2 \end{pmatrix} = 2.$$

Por tanto $\dim \operatorname{Ker}(f - \lambda_1 \mathrm{Id}) = 2$ y $\dim \operatorname{Ker}(f - \lambda_2 \mathrm{Id}) = 1$, y el Teorema 5.1.4 asegura que el endomorfismo f es diagonalizable. En realidad el segundo rango nos lo podíamos haber ahorrado porque por definición de autovalor sabemos que la segunda dimensión es al menos uno y en total no puede haber más de tres vectores linealmente independientes.

Hay otra razón por la cual el segundo rango nos lo podríamos haber ahorrado y es que se puede demostrar, como veremos más adelante, que $\dim \operatorname{Ker}(f - \lambda_i \mathrm{Id})$ es a lo más la multiplicidad de la raíz $\lambda = \lambda_i$ en la ecuación característica.

Si se nos pidiera una base $\mathcal{B}$ en la que diagonaliza habría que resolver los sistemas $(A - \lambda_1 I)\vec{x} = \vec{0}$ y $(A - \lambda_2 I)\vec{x} = \vec{0}$ para obtener bases $\mathcal{B}_1 = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$ y $\mathcal{B}_2 = \{\vec{v}_3\}$ de los núcleos. Una solución válida es

$$\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2 = \left\{ \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}.$$

Analicemos con un poco de detalle los cálculos que llevan a $\mathcal{B}_1$. Aplicando reducción de Gauss al sistema $(A - \lambda_1 I)\vec{x} = \vec{0}$, se tiene

$$A - \lambda_1 I \underset{f_1 \mapsto f_1/2}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -6 & -6 & -3 \\ 6 & 6 & 3 \end{pmatrix} \underset{\substack{f_2 \mapsto f_2 + 3f_1 \\ f_3 \mapsto f_3 - 3f_1}}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Tomando $x_2 = \mu_1$, $x_3 = \mu_2$, como habitualmente, se obtiene $x_1 = -\mu_1 - \mu_2/2$. Es decir, las soluciones son

$$\vec{x} = \mu_1(-1, 1, 0)^t + \mu_2(-1/2, 0, 1)^t.$$

El segundo vector se ha multiplicado por -2 para eliminar la fracción.

Un ejemplo en dimensión mayor con un volumen de cálculos reducido por tener una matriz casi diagonal, es

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R}).$$

Un resultado de la próxima sección (el Corolario 5.2.4) asegura que A es diagonalizable sobre $\mathbb{R}$ sin hacer ninguna cuenta. Sin avanzar acontecimientos, lo que haríamos es calcular el polinomio característico que, desarrollando por la primera columna y después por la última, resulta ser $(2-\lambda)(-2-\lambda)(\lambda^2-4) = (\lambda+2)^2(\lambda-2)^2$. Por tanto, solo hay dos valores propios: $\lambda_1 = -2$ y $\lambda_2 = 2$. A pesar de ello,

$$\operatorname{rg}(A-\lambda_1 I) = \operatorname{rg}\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2 \quad \text{y} \quad \operatorname{rg}(A-\lambda_2 I) = \operatorname{rg}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} = 2$$

implican que hay $4-2=2$ vectores propios independientes para cada uno de los valores propios y con los cuatro autovectores tenemos una base, en consonancia con el Teorema 5.1.4. Unos cálculos sencillos llevan a que una posibilidad para tal base es

$$\big\{(0,-1,1,0)^t, (0,0,0,1)^t, (1,0,0,0)^t, (0,1,1,0)^t\big\}.$$

El hecho de que el segundo y el tercer vector sean elementos de la base canónica está relacionado con que la submatriz de A formada por las filas y columnas primera y cuarta sea ya diagonal.

Hasta ahora todos los ejemplos que hemos visto son diagonalizables ya sea en $\mathbb{R}$ o al menos en $\mathbb{C}$ si hay autovalores que no son reales. Esta es la situación común pero hay contraejemplos. Así, el endomorfismo $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ dado por

$$f(\vec{x}) = A\vec{x} \qquad \text{con} \quad A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

tiene polinomio característico $\lambda^2 - 4\lambda + 4 = (\lambda-2)^2$, lo que da lugar a un único valor propio $\lambda_1 = 2$, y para que fuera diagonalizable necesitaríamos $\dim \operatorname{Ker}(f - 2\,\mathrm{Id}) = 2$ lo que requiere $\operatorname{rg}(A-2I) = 0$, que obviamente es falso.

Un ejemplo en dimensión 3 es $f(\vec{x}) = A\vec{x}$ con

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 1 \\ -6 & -3 & -1 \\ 6 & 4 & 2 \end{pmatrix} \qquad \text{que tiene} \quad |A-\lambda I| = -(\lambda-1)^2(\lambda-2).$$

A pesar de que el polinomio característico es el mismo que en un ejemplo diagonalizable anterior, dando lugar a $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$; la matriz A no es diagonalizable, porque $\dim \operatorname{Ker}(f - \lambda_2 \mathrm{Id}) = 1$ y λ_1 no provee dos autovectores independientes:

$$\dim \operatorname{Ker}(f - \lambda_1 \mathrm{Id}) = 3 - \operatorname{rg}\begin{pmatrix} 4 & 3 & 1 \\ -6 & -4 & -1 \\ 6 & 4 & 1 \end{pmatrix} = 3 - 2 = 1.$$

Los ejemplos que involucran números complejos no entrañan dificultades especiales más allá de que seguramente no estamos muy entrenados para resolver ecuaciones algebraicas con coeficientes complejos. En realidad tampoco lo estamos completamente para las de coeficientes reales y siempre los ejercicios deben estar muy preparados para que la ecuación característica sea asequible. Solo por dar un ejemplo, consideremos el endomorfismo $F : \mathbb{C}^2 \longrightarrow \mathbb{C}^2$ dado por

$$f(\vec{x}) = A\vec{x} \qquad \text{con} \quad A = \begin{pmatrix} 1+2i & -1 \\ -2 & 1-i \end{pmatrix}$$

y estudiemos si es diagonalizable y, en caso afirmativo, una base en que se diagonaliza. Se tiene

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 1+2i-\lambda & -1 \\ -2 & 1-i-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - (2+i)\lambda + 1 + i.$$

En principio debemos resolver una ecuación cuadrática con números complejos, quizá no recuerdes o no hayas aprendido nunca cómo hacer raíces cuadradas de números complejos, por ello seguiremos un camino alternativo, siempre basado en que el problema está preparado. A simple vista se observa que $\lambda_1 = 1$ es solución y, dividiendo entre $\lambda - 1$ o de forma más sencilla[2], se sigue que el otro autovalor es $\lambda_2 = 1 + i$. El Corolario 5.1.5 asegura que es diagonalizable y para hallar la base debemos calcular autovectores dando soluciones no triviales de los sistemas $(A - \lambda_i I)\vec{x} = \vec{0}$ que son:

$$\begin{pmatrix} 2i & -1 \\ -2 & -i \end{pmatrix} \vec{x} = \vec{0} \qquad \text{y} \qquad \begin{pmatrix} i & -1 \\ -2 & -2i \end{pmatrix} \vec{x} = \vec{0}.$$

En realidad no hay nada que resolver, como sabemos que hay infinitas soluciones, una de las ecuaciones de cada sistema es prescindible y basta con ajustar una solución de la otra. Por ejemplo, en el primer sistema podemos tomar $\vec{v}_1 = (1, 2i)^t$ y en el segundo $\vec{v}_2 = (1, i)^t$; y una posibilidad para la base buscada es $\mathcal{B} = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$.

Exprimiendo el silicio [opcional]. El comando básico de `matlab/octave` para calcular valores y vectores propios es `eig`. Tiene un comportamiento un poco peculiar: si lo usamos tal cual o recuperamos su salida asignándosela a una variable, por ejemplo `la = eig(A)`, entonces genera los valores propios, pero si se la asignamos a dos variables como `[C,D] = eig(A)` entonces en `D` estará la forma diagonal y en `C` el cambio de base, cuyas columnas son autovectores. Así pues, para comprobar el primer ejemplo que vimos, podemos usar:

```
% Matriz original
A =  [3,2; 1,4];
% Muestra los autovalores
eig(A)
% D es la forma diagonal y C el cambio de base
[C,D] = eig(A)
% Primer autovector de la base
C(:,1)
% Segundo autovector de la base
C(:,2)
% Comprobación: esto recupera la matriz original
C*D*inv(C)
```

[2]Por ejemplo usando que para $\lambda^2 - B\lambda + C$ siempre C es el producto de raíces.

Una particularidad es que siempre escoge las columnas de `C` de manera que sean de norma uno, por ello los autovectores resultan un múltiplo de los que hemos elegido nosotros. Si cambiamos la matriz por `[3,1; -1,1]`, aparentemente el programa también la diagonaliza lo cual está en contradicción con lo que habíamos probado. Esto se debe a que las matrices no diagonalizables en $\mathbb{C}^n$ están infinitamente cerca de otras que sí lo son y los errores de redondeo engañan a `matlab/octave`. La `C` que ofrece como resultado está muy próxima a ser singular y su inversa tiene elementos del orden de 30 millones.

Aquí va un pequeño programa que se explica a sí mismo con tres instrucciones para hacer los cálculos de esta sección con `sagemath`:

```
# Matriz original
A = matrix(2,2,[3,2,1,4])
# El polinomio característico
print(A.characteristic_polynomial())
# Los autovalores
print(A.eigenvalues())
# Los autovalores, autovectores y multiplicidades
print(A.eigenvectors_right())
```

Ciertamente, es un poco raro el nombre `eigenvectors_right`. Se debe a que existe también un `eigenvectors_left` que calcula los autovectores de la traspuesta, lo que correspondería a multiplicar vectores fila a la izquierda. En el programa anterior la salida del comando, escrita en una línea, es la lista

```
[(5, [(1, 1)], 1), (2, [(1, -1/2)], 1)]
```

En cada elemento de la lista, el primer número es el autovalor, la sublista que sigue una base del autoespacio y el tercer número la multiplicidad del autovalor en el polinomio característico. Así para la matriz $20I_2$ obtendríamos `[(20, [(1, 0), (0, 1)], 2)]`. Este tipo de información es suficiente para saber si es diagonalizable o no. Por ejemplo para la matriz `[3,1; -1,1]` tendríamos `[(2, [(1, -1)], 2)]` y como solo hay un vector en la base del autoespacio (menos que la multiplicidad), no es diagonalizable. Existe también un comando `eigenspaces_right` que da los autoespacios y sus dimensiones.

Con `sagemath` el análogo de `eig` es `eigenmatrix_right` que siempre produce un par de matrices. Su primer elemento es la matriz diagonal y el segundo la matriz de cambio de base (al revés que en `matlab/octave`). Cuando se aplica a una matriz no diagonalizable las columnas de esta matriz correspondientes a autovectores ausentes se completan con cero. Así una manera de saber si una matriz es diagonalizable o no, es con un código como el siguiente:

```
# Matriz original
A = matrix(3,3, [5,3,1, -6,-3,-1, 6,4,2])

[D, C] = A.eigenmatrix_right()
# Si C tiene columnas nulas no es diagonalizable
if C.determinant()==0: print('No es diagonalizable')
else: print('Sí es diagonalizable')
```

Tal como está, corresponde al último ejemplo no diagonalizable que hemos visto.