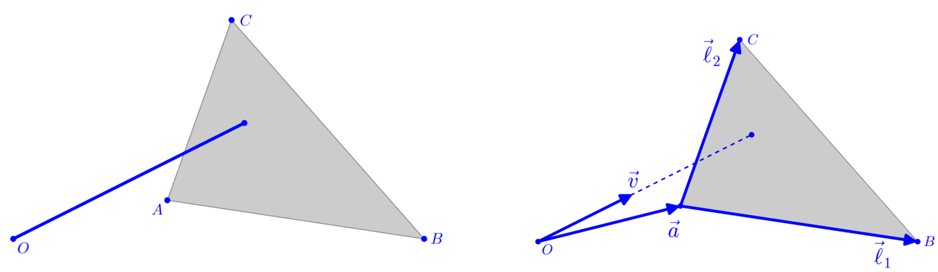
Extra para ingenieros

A lo largo del capítulo, se ha mencionado varias veces que los determinantes no son tan útiles como pueden llevar a pensar los temarios de la enseñanza secundaria, sobre todo cuando la dimensión crece, y que fórmulas como la de Cramer son más una curiosidad teórica que un instrumento general de cálculo. Sin embargo, en dimensión baja los determinantes todavía tienen algo que decir frente a la eliminación de Gauss y, de hecho, la regla de Cramer para sistemas 3×3 tiene cierta relevancia en cierto algoritmo usado en escenas tridimensionales generadas por ordenador.

El algoritmo de Möller-Trumbore. Las figuras 3D que aparecen en los videojuegos o en las películas de animación son en su mayoría mallas compuestas por triángulos con texturas. En el estudio de las colisiones o en el *rendering*[7] es muy relevante el problema geométrico de saber si una recta interseca al triángulo determinado por tres puntos. Por ejemplo, aparece en el *ray tracing* (trazado de rayos) que consiste en seguir la trayectoria de rayos de luz virtuales para construir reflejos y sombras. Este es un proceso computacionalmente costoso porque en principio hay infinidad de rayos y reflexiones. A este respecto, quizá hayas oído que en una conocida película de animación el *rendering* requirió casi 10000 años de tiempo de CPU (para lo cual se emplearon decenas de miles de ordenadores). Cualquier pequeña mejora en la solución del problema geométrico tiene un efecto en el tiempo final por la cantidad de veces que hay que resolverlo.

Lo que a todos se nos ocurriría al enfrentarnos al problema geométrico anterior es calcular primero la ecuación del plano determinado por los tres puntos, después hallar la intersección entre la recta y el plano y, finalmente, comprobar si dicha intersección cae dentro del triángulo. El algoritmo de Möller-Trumbore [27] consigue resolver el problema sin necesidad de calcular la ecuación del plano y reduciendo el volumen de cálculos gracias a una aplicación de la regla de Cramer escrita de una forma especial.



Para simplificar, supondremos que la recta pasa por el origen. No hay pérdida de generalidad en ello porque siempre se puede conseguir con una traslación. De este modo, los puntos de la recta serán $\vec{x} = \lambda\vec{v}$ con $\vec{v}$ un vector director y $\lambda \in \mathbb{R}$. Si

[7] Este es el proceso para generar una imagen realista, a veces calcado al español como *renderización* o *renderizado*.

imponemos $\lambda \geq 0$ tendremos un *rayo* en lugar de una recta, concretamente la semirrecta que parte del origen en la dirección de $\vec{v}$. Llamemos $\vec{\ell}_1$ y $\vec{\ell}_2$ a los vectores que determinan dos lados del triángulo T y que concurren en un vértice que corresponde a un vector $\vec{a}$. Los puntos del plano que contiene a T son de la forma $\vec{a} + \mu\vec{\ell}_1 + \nu\vec{\ell}_2$ y no es difícil establecer el siguiente criterio para saber cuáles de estos puntos caen dentro del triángulo:

$$\vec{a} + \mu\vec{\ell}_1 + \nu\vec{\ell}_2 \in T \quad \Longleftrightarrow \quad \mu \geq 0,\ \nu \geq 0,\ \mu + \nu \leq 1. \tag{3.8}$$

La intersección de la recta y el plano conduce al sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas λ, μ, ν:

$$-\lambda\vec{v} + \mu\vec{\ell}_1 + \nu\vec{\ell}_2 = -\vec{a}. \tag{3.9}$$

Resolviéndolo con la regla de Cramer y comprobando las condiciones de la parte derecha de (3.8) sabremos si la recta corta al triángulo. Si además $\lambda \geq 0$, lo hará el rayo. Finalmente, se puede comprobar que el signo del determinante que aparece en los denominadores de la regla de Cramer, sirve para saber si el rayo corta por la cara "trasera" o la "delantera" al triángulo, lo cual es útil en las aplicaciones esencialmente porque se desea que los objetos solo reflejen la luz por su parte exterior.

Siguiendo el artículo original [27], para reducir el volumen de cálculos de los determinantes se escribe la regla de Cramer en la forma:

$$\begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \\ \nu \end{pmatrix} = \frac{1}{\vec{s}_1 \cdot \vec{\ell}_1} \begin{pmatrix} \vec{s}_2 \cdot \vec{\ell}_2 \\ -\vec{s}_1 \cdot \vec{a} \\ \vec{s}_2 \cdot \vec{v} \end{pmatrix} \qquad \text{con} \quad \vec{s}_1 = \vec{v} \times \vec{\ell}_2 \quad \text{y} \quad \vec{s}_2 = \vec{\ell}_1 \times \vec{a}$$

donde $\cdot$ y $\times$ indican, respectivamente, el *producto escalar* y el *producto vectorial* habituales en $\mathbb{R}^3$. Esto es,

$$\vec{x} \cdot \vec{y} = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 \qquad \text{y} \qquad \vec{x} \times \vec{y} = \left(\begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \right)^t.$$

Por ejemplo, $\vec{s}_1 \cdot \vec{\ell}_1$ es el desarrollo por la última columna de $\det(\vec{v}, \vec{\ell}_2, \vec{\ell}_1)$ que coincide con $\det(-\vec{v}, \vec{\ell}_1, \vec{\ell}_2)$ que corresponde al denominador al aplicar la regla de Cramer a (3.9). El numerador $\vec{s}_2 \cdot \vec{\ell}_1$ que aparece en λ es, de la misma forma, $\det(\vec{\ell}_1, \vec{a}, \vec{\ell}_2)$ que coincide con $\det(-\vec{a}, \vec{\ell}_1, \vec{\ell}_2)$, de nuevo en coherencia con (3.9). Es un ejercicio sencillo comprobar que también las fórmulas para μ y ν responden a la regla de Cramer.

Una curiosidad es que los autores de [27] consideran que (3.9) expresa un cambio de coordenadas de forma que al trabajar en la base $\{\vec{v}, \vec{\ell}_1, \vec{\ell}_2\}$ el triángulo se transforma en un "triángulo unidad".