Exprimiendo el silicio [opcional]. En dos dimensiones, una vez que uno sabe el área del triángulo tiene la posibilidad de hallar el área de cualquier polígono dividiéndolo en triángulos.

En tres dimensiones el análogo sería la división de un poliedro en tetraedros. El siguiente código `sagemath` lleva a cabo este proceso para hallar el volumen de cualquier pirámide partiendo de una lista `L` de vértices en el mismo plano, definidos en la línea 2, que determinan la base y un vértice "superior" `V`, definido en la línea 4, fuera de este plano.

```
1  # Lista de puntos en la base (en el mismo plano)
2  L = [(1,0,0), (1/2,sqrt(3)/2,0), (-1/2,sqrt(3)/2,0), (-1,0,0), (-1/2,-sqrt(3)/2,0), (1/2,-sqrt(3)/2,0)]
3  # Vértice superior
4  V = (0,0,1)
5
6  N = len(L)
7
8  # Lista vectores que parten de L[0] al resto de
9  # los vértices de la base
10 Lv = []
11 for k in range(1,N):
12         Lv.append( vector(L[k])-vector(L[0]) )
13
14 # Vector de L[0] a V
15 v = vector(L[0])-vector(V)
16
17 # Suma las áreas de los N-2 tetraedros
18 vol = 0
19 for k in range(N-2):
20         A = matrix(3,3,[Lv[k],Lv[k+1],v])
21         vol += 1/6*abs( A.determinant() )
22
23 print('Volumen =', vol)
24
25 # Dibuja las aristas de la pirámide
26 P = line3d(L+[L[0]], thickness=10)
27 for k in range(N):
28     P += line3d([L[k],V], thickness=10)
29 P.show()
```

Cada tetraedro está formados por uno de los triángulos en que se divide la base y el vértice `V`. El volumen de cada uno de ellos se calcula en la línea 21 y la 23 muestra la suma total de los volúmenes. A modo de extra, las líneas a partir de la 25 hacen un dibujo de las aristas, el "esqueleto", de la pirámide.

3.3. Regla de Cramer, inversa y rango

La eliminación de Gauss permite que nosotros, o más a menudo los sirvientes de silicio bajo nuestro mando, calculen soluciones de sistemas de ecuaciones lineales con cierta eficiencia. Por ejemplo, nuestro ordenador personal la llevará a cabo sin ningún remilgo en doble precisión sobre un sistema 100×100. La eliminación de Gauss también servía para calcular la matriz inversa y el rango.

Lo que vamos a ver ahora es que las soluciones de sistemas lineales, la inversa y el rango admiten fórmulas con determinantes. Si estos determinantes se hallan mediante eliminación de Gauss tal cosa no parece aportar demasiado a lo que sabíamos. En realidad, es así desde el punto de vista práctico en cuanto nos salimos de dimensión baja, e incluso a menudo en ella. Aunque profesionales y aficionados de ayer y hoy encuentren cierta satisfacción en que exista una fórmula "explícita" para resolver sistemas lineales, tal fórmula es inútil numéricamente cuando los denominadores son mucho más complicados que (3.3), lo importante es que haya un algoritmo eficiente. Hay que dejar claro el carácter eminentemente teórico de esta sección por mucho que en cursos anteriores uno haya hecho los cálculos de esta forma. El autor de [7] va todavía más lejos en [6] proponiendo que "el álgebra lineal puede hacerse mejor sin determinantes".

La solución de sistemas de ecuaciones lineales compatibles determinados en términos de determinantes es la antigua *regla de Cramer* que todavía hoy tiene una fama y difusión quizá exagerada[5] habida cuenta de su poca utilidad práctica.

Teorema 3.3.1 (*regla de Cramer*)**.** *Sea $A\vec{x} = \vec{b}$ con $A \in \mathcal{M}_n(K)$ un sistema compatible determinado y sea A_j la matriz A reemplazando la columna j-ésima por $\vec{b}$, entonces su solución es*

$$x_j = \frac{|A_j|}{|A|}, \qquad j = 1, 2, \dots, n.$$

Por ejemplo, el caso $n = 2$ es

$$x_1 = \frac{1}{|A|}\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}, \quad x_2 = \frac{1}{|A|}\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}.$$

Sustituyendo $|A| = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ y calculando los otros dos determinantes se llega a la fórmula (3.1).

Si uno piensa en lo que resultaría en el caso $n = 3$ evaluando los determinantes con (3.3) comprenderá por qué las "complicadas expresiones" mencionadas en (3.2) no se escribieron allí explícitamente.

Veamos un ejemplo numérico de dimensión 3. Concretamente, resolvamos el sistema $A\vec{x} = \vec{b}$ con

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & -3 \end{pmatrix}, \qquad \vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \qquad \text{y} \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ 10 \end{pmatrix}.$$

Tras unos cálculos obtenemos que el determinante de A es 16. Más cálculos muestran

$$\begin{vmatrix} -2 & 2 & 1 \\ 5 & 1 & 2 \\ 10 & -2 & -3 \end{vmatrix} = 48, \quad \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 3 & 5 & 2 \\ 1 & 10 & -3 \end{vmatrix} = -32 \quad \text{y} \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 3 & 1 & 5 \\ 1 & -2 & 10 \end{vmatrix} = -16.$$

Por tanto la solución es $x = 48/16 = 3$, $y = -32/16 = -2$, $z = -16/16 = -1$.

[5]Recuérdese que la libertad de cátedra es el extraño privilegio que permite que los profesores digan tonterías sin que puedan ser demandados. Teniendo en cuenta que el autor homónimo, G. Cramer, vivió en la primera mitad del siglo XVIII es difícil que tenga hoy un club de seguidores que se sientan ofendidos.

Para la demostración del Teorema 3.3.1 utilizaremos un resultado que conviene destacar aunque solo consista en poner en claro lo que ya sabemos. La notación al uso consiste en llamar *adjunto* o *cofactor* del elemento a_{ij} de una matriz $A \in \mathcal{M}_n(K)$ a $A_{ij} = (-1)^{i+j} d_{ij}$ donde d_{ij} es el determinante de la matriz A cuando se elimina la fila i-ésima y la columna j-ésima. Por ejemplo:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 7 \end{pmatrix} \Rightarrow A_{11} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 7 \end{vmatrix} = 7, \ A_{12} = -\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 7 \end{vmatrix} = -20, \ A_{31} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Proposición 3.3.2. *Sea $A \in \mathcal{M}_n(K)$. Para cualquier $1 \le k \le n$ y $1 \le l \le n$*

$$|A| = \sum_{i=1}^{n} a_{ik} A_{ik} = \sum_{j=1}^{n} a_{lj} A_{lj}.$$

Demostración. La primera igualdad para $k = 1$ es nuestra definición de determinante y en el resto de los casos se sigue de la Proposición 3.1.2 c) intercambiando la primera fila por la k-ésima. La segunda igualdad es consecuencia de la primera teniendo en cuenta $|A| = |A^t|$ por la Proposición 3.1.5. $\square$

Sin apenas esfuerzo, de aquí se deduce una formula para el cálculo de la matriz inversa con determinantes.

Teorema 3.3.3. *Sea $A \in \mathcal{M}_n(K)$ con $|A| \neq 0$. Su matriz inversa es la traspuesta de la matriz formada por los adjuntos dividida por $|A|$.*

Demostración. La matriz del enunciado es $(b_{ij})_{i,j=1}^n$ con $b_{ij} = A_{ji}/|A|$. Los elementos de $C = AB$ son $c_{ij} = \sum_k a_{ik} A_{jk}/|A|$. Si $i = j$ esto es 1 por la Proposición 3.3.2 y este mismo resultado asegura que $|A| c_{ij}$ para $i \neq j$ es el determinante de A cuando la fila i-ésima se sustituye por la j-ésima. Ahora bien, una matriz con dos filas iguales tiene determinante nulo y se deduce $C = I$. $\square$

La prueba de la regla de Cramer es muy similar.

Demostración del Teorema 3.3.1. La solución buscada es $\vec{x} = B\vec{b}$ con $B = A^{-1}$ cuyos elementos son, según lo anterior, $b_{ij} = A_{ji}/|A|$. Entonces la coordenada j-ésima de $B\vec{b}$ es $\sum_l b_{jl} b_l = |A|^{-1} \sum_l b_l A_{lj}$. Por la segunda igualdad de la Proposición 3.3.2 este último sumatorio es lo mismo que el determinante de la matriz A cambiando todos los elementos a_{lj}, que conforman la columna j-ésima, por b_l. $\square$

Si en el último ejemplo completamos el cálculo del resto de los adjuntos, $A_{13} = -1$, $A_{21} = -7$, $A_{22} = 13$, $A_{23} = 1$, $A_{32} = 1$, $A_{33} = -1$, se deduce del Teorema 3.3.3, con el cálculo adicional $|A| = -7$, que

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 7 \end{pmatrix}^{-1} = -\frac{1}{7} \begin{pmatrix} 7 & -20 & -1 \\ -7 & 13 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}^t = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} -7 & 7 & 0 \\ 20 & -13 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Para detectar errores en tanta cuenta es conveniente multiplicar aunque sea parcialmente AA^{-1} y compararlo con la matriz identidad.

El cálculo de A^{-1} con el Teorema 3.3.3 lleva rápido a la fórmula válida para $n = 2$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

pero para n mayor requiere hallar n^2 determinantes de tamaño $n - 1$ y uno de tamaño n, lo cual se vuelve bastante gravoso en cálculos a mano ya en los casos típicos con $n = 4$.

El cálculo del rango con determinantes puede ser comparativamente menos eficiente todavía. La notación habitual es llamar en este cálculo *menor* de tamaño k de una matriz A al determinante de una submatriz cuadrada de A formada por los elementos que están simultáneamente en k filas y k columnas de nuestra elección. Por ejemplo, los números d_{ij} que aparecen en la definición de los adjuntos son menores de tamaño $k - 1$. Con cierto abuso de notación se dice que un menor contiene a otro si viene de una submatriz que contiene a la del segundo.

Teorema 3.3.4. *Sea $A \in \mathcal{M}_n(K)$. Se cumple* $\operatorname{rg}(A) = k$ *si y solo si existe un menor de tamaño k no nulo y todos los menores de dimensión mayor (si existieran) que lo contienen son nulos.*

Demostración. Si $\operatorname{rg}(A) = k$, por definición, hay k columnas pivote. Podemos suponer que son las k primeras porque reordenar las columnas no cambia el rango. Al usar reducción de Gauss-Jordan la segunda transformación elemental llevará k filas a las k primeras posiciones para obtener en la forma escalonada reducida $(e_{ij})_{i,j=1}^k = I_k$. Por la Proposición 3.1.2 el menor correspondiente a esas k filas y las k primeras columnas es no nulo (es un múltiplo no nulo de $|I_k| = 1$). Por otro lado, si un menor que lo contiene fuera también no nulo, habría una nueva columna pivote (recuérdese el Corolario 3.1.4) lo que contradice $\operatorname{rg}(A) = k$.

Recíprocamente, si hay un menor no nulo de tamaño k, podemos suponer que es $\left|(a_{ij})_{i,j=1}^k\right|$ y las k primeras columnas son pivote por lo que $\operatorname{rg}(A) \ge k$. Si todo menor de tamaño $k+1$ que lo contiene se anula, es imposible que haya otra columna pivote, por tanto $\operatorname{rg}(A) < k + 1$. □

Por ejemplo, consideremos las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}.$$

En A el determinante de la submatriz formada por la segunda y cuarta columna y las dos filas es no nulo. Como no hay posibilidad de menores de tamaño mayor, $\operatorname{rg}(A) = 2$. En B está claro que $\det\left((b_{ij})_{i,j=1}^2\right) = 1 \ne 0$ y $|B| = 0$ implica $\operatorname{rg}(B) = 2$. Está claro a simple vista que $\operatorname{rg}(C) = 1$ porque todas las columnas (o las filas) son proporcionales unas a otras. Para proceder con determinantes habría que considerar por ejemplo $c_{11} \neq 0$ y hallar todos los menores de tamaño 2 que lo contienen, cuatro en total, comprobando que se anulan.

Una vez que sabemos hallar el rango con determinantes y detectar las columnas pivote con ellos, podemos decidir la estructura del conjunto de soluciones de un sistema lineal por medio del Corolario 1.2.4 e incluso probarlo a través de determinantes[6]. Todavía más, el Teorema 3.3.1 aplicado a las variables correspondientes a las columnas pivote tomando el resto como parámetros daría una versión (un poco fea de enunciar) de la regla de Cramer para sistemas compatibles indeterminados, es decir, una solución general basada en determinantes.

Exprimiendo el silicio [opcional]. Después de tanto insistir en la naturaleza teórica de la sección no merece la pena extenderse mucho con ejemplos numéricos. Solo veremos el siguiente código `matlab/octave` que genera un sistema aleatorio `N×N` y calcula la solución con un comando directo y con la regla de Cramer.

```
1  % Dimensión
2  N = 3;
3  % Matriz de coeficientes aleatoria
4  A = rand(N)
5  % Vector de coeficientes aleatorio
6  b = rand(N,1)
7
8  % Solución con comando directo
9  directo = A\b
10
11 % Solución con la regla de Cramer
12 x = zeros(N,1);
13 d = det(A);
14 for j = 1:N
15         Aj = A;
16         Aj(:,j) = b;
17         x(j) = det(Aj)/d;
18 end
19 cramer = x
```

Esto funciona sin mayores contratiempos para `N` del orden de unos cientos (para dimensiones tan grandes es aconsejable poner un punto y coma al menos al final de la línea 4), lo que parece contradecir consideraciones anteriores sobre la ineficiencia pero hay que tener en cuenta que tener en cuenta que `matlab/octave` no está calculando los determinantes con fórmulas como la de nuestra definición sino con alguna forma de eliminación de Gauss.

[6] Para complicar más el lío de atribuciones del Corolario 1.2.4, llamado de Rouché-Frobenius en el mundo hispano y de Rouché-Capelli en el anglosajón, en [1] se sugiere que la primera prueba impresa, la cual se basaba en determinantes, podría deberse a C.L. Dodgson el escritor y matemático autor de “Alicia en el país de las maravillas” quien introdujo un algoritmo de cómputo de determinantes [2].