

```

1 # K es el cuerpo con dos elementos {0,1}
2 K = GF(2)
3 # V es el espacio vectorial de pares de bits
4 V = VectorSpace(K,2)
5 print('Lista de vectores:')
6 for v in V:
7     print(v)
8 print('=====')
9
10 cero = vector( K, [0,0] )
11 uno = vector( K, [1,0] )
12 corazon = vector( K, [0,1] )
13 trebol = vector( K, [1,1] )
14
15 print('Tabla de sumas:')
16 print('C+T=', corazon + trebol)
17 print('1+1=', uno + uno)
18 print('C+C=', corazon + corazon)
19 print('T+T=', trebol + trebol)

```

En las líneas 10–13 se dan respectivamente los curiosos nombres *cero*, *uno*, *corazon* y *trebol* a los vectores de V . El resto del programa comprueba que con estos nombres la tabla de sumas es exactamente igual que la del extraño cuerpo $\{0, 1, \heartsuit, \clubsuit\}$ de cuatro elementos mencionado en una nota a pie de página. Esto implica que hay una forma no solo de sumar y restar vectores de V sino también de multiplicarlos y dividirlos (salvo por cero). Pues bien, esto es un hecho general. Un teorema asegura que para cualquier cuerpo finito K y cualquier n hay una manera de multiplicar y dividir vectores en K^n que convierte este espacio vectorial en un cuerpo⁶.

Antes de que pienses que los matemáticos se preocupan por cosas muy raras, debes saber que en el caso de $K = \{0, 1\}$ esta estructura adicional sobre tiras de bits que permite sumarlas, restarlas, multiplicarlas y dividir las conservando su longitud, es crucial en la corrección de errores al reproducir soportes digitales como CD, DVD o Blu-ray. Tal corrección no es un lujo, simplemente sin ella no funcionarían porque incluso recién salidos de fábrica, antes de que los rayes, contienen muchos errores de grabación. Si consideras que estos soportes son antediluvianos, debes saber que la corrección de errores también se utilizan en las memorias USB para alargar su vida útil. Quizá mientras lees estos apuntes se haya averiado alguno de los bits en el *pendrive* donde los almacenas pero no sufrirás de pánico informático hasta que el número de fallos colapse el algoritmo de corrección de errores.

2.2. Bases y dimensión

Pensemos en \mathbb{R}^2 que identificamos con todos los puntos o direcciones del plano. Tenemos claro que su dimensión es dos porque necesitamos especificar una x y una y . Alguien con educación matemática elemental nos podría decir que hay cuatro puntos cardinales y nosotros convencerle de que usando números negativos hay redundancia en ellos, 3 pasos al sur son -3 pasos al norte. Todavía hay más redundancia si introducimos las direcciones intermedias de la rosa de los vientos, como el noreste. Aun

⁶Un pionero en la introducción de estos cuerpos finitos fue É. Galois, un matemático de vida azarosa en tiempos de la restauración monárquica francesa que murió en un duelo con tan solo 20 años. La notación **GF** que emplea **sagemath** son las iniciales de *Galois field*.

así, siempre que elijamos dos direcciones que no tengan nada que ver, la redundancia desaparece y obtenemos un sistema válido para hacer mediciones. Por ejemplo, un paso al este y dos al norte son $\sqrt{2}$ pasos al noreste y uno al norte, ya que un paso de longitud 1 al noreste te lleva a $(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$.

En álgebra lineal los diferentes sistemas de medida constituyen lo que se llaman *bases*. En términos prácticos cabe preguntarse por qué no fijar uno de esos sistemas convencionalmente, igual que hay un acuerdo en el meridiano de Greenwich. La respuesta es que la conveniencia de uno u otro depende de la situación. En astronomía las elipses de los planetas son muy perfectas cuando se miden desde el centro de masas del Sistema Solar, desde allí la física se vuelve más fácil pero a la hora de hacer observaciones la mayor parte de los telescopios están en la Tierra y es más natural medir en ese sistema rotatorio en el que las órbitas de los planetas son curvas complicadas.

En el ámbito de la ingeniería, emplear un sistema u otro al describir una señal de audio puede servir para separar algunas de sus características como el ruido o los graves o los agudos, que permitan procesarla adecuadamente. Quizá los modelos de color RGB e YUV te resulten familiares. Ambos describen colores mediante tres coordenadas. El primero es un sistema más adecuado para que trabajen los ordenadores con él porque responde a la física con la que se reproducen los colores en un monitor o cómo se almacenan internamente. Sin embargo, YUV es más intuitivo para la percepción humana y permite realizar más fácilmente algunas operaciones básicas como pasar de color a tonos de gris.

Dados vectores $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n \in V$, una expresión del tipo $\lambda_1 \vec{v}_1 + \lambda_2 \vec{v}_2 + \dots + \lambda_n \vec{v}_n$ se dice que es una *combinación lineal* de dichos vectores. Corresponde a “andar” λ_1 en la dirección de \vec{v}_1 , λ_2 en la de \vec{v}_2 , etc. El conjunto de todas las combinaciones lineales lo indicaremos con una \mathcal{L} , es decir,

$$\mathcal{L}(\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n\}) = \{\lambda_1 \vec{v}_1 + \lambda_2 \vec{v}_2 + \dots + \lambda_n \vec{v}_n : \lambda_1, \dots, \lambda_n \in K\}.$$

Está claro tras la Proposición 2.1.1 que forman un subespacio de V . Nada impediría considerar $\mathcal{L}(C)$ con C un conjunto infinito de vectores, definiéndolo como la unión de los $\mathcal{L}(C')$ para todos los subconjuntos finitos⁷ $C' \subset C$, aunque no será de utilidad en este curso.

Retomando lo dicho anteriormente, queremos detectar y eliminar las redundancias. Por ejemplo, $\mathbb{R}^2 = \mathcal{L}(\{(1, 1)^t, (1, -1)^t, (0, 1)^t\})$ porque

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (x+y) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} - y \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} - (x+y) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

pero como $(0, 1)^t = \frac{1}{2}(1, 1)^t - \frac{1}{2}(1, -1)^t$, en realidad esta expresión se reduce a

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{x+y}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{x-y}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

⁷Este regate se hace para eliminar los problemas de convergencia que pertenecen al negociado de los cursos de análisis.

y por tanto $\mathbb{R}^2 = \mathcal{L}(\{(1, 1)^t, (1, -1)^t\})$, donde $(1, 1)^t$ y $(1, -1)^t$ ya no albergan redundancias porque con uno solo de ellos es imposible obtener todo \mathbb{R}^2 .

Formalicemos matemáticamente la idea de la ausencia de redundancias.

En un espacio vectorial V sobre K se dice que los vectores $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n$ son *linealmente independientes* si la única solución de

$$(2.1) \quad \lambda_1 \vec{v}_1 + \lambda_2 \vec{v}_2 + \dots + \lambda_n \vec{v}_n = \vec{0}$$

con $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in K$ es $\lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0$ (aunque es irrelevante en este curso, para una conjunto infinito de vectores, la independencia lineal se define pidiendo que ocurra para cualquiera de sus subconjuntos finitos).

En un alarde de originalidad, cuando hay más soluciones se dice que los vectores son *linealmente dependientes*. En este caso algún $\lambda_i \neq 0$ y se despeja \vec{v}_i en términos del resto de los vectores por medio de $\vec{v}_i = -\sum_{j \neq i} \lambda_i^{-1} \lambda_j \vec{v}_j$. Es ahí donde está la redundancia antes mencionada.

Seguro que no asombra que el estudio de la dependencia o independencia lineal se reduzca habitualmente a discutir un sistema homogéneo.

Por ejemplo, estudiemos si los vectores de \mathbb{R}^3

$$\vec{v}_1 = (2, 1, -1)^t, \quad \vec{v}_2 = (3, 0, 1)^t, \quad \text{y} \quad \vec{v}_3 = (-1, 4, -7)^t$$

son linealmente independientes. La ecuación (2.1) se puede escribir como

$$A\vec{\lambda} = \vec{0} \quad \text{con} \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & 4 \\ -1 & 1 & -7 \end{pmatrix}, \quad \vec{\lambda} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix}.$$

En general en \mathbb{R}^n o \mathbb{C}^n el sistema será $A\vec{\lambda} = \vec{0}$ con A la matriz formada por los vectores en columna. Es fácil ver que $\text{rg}(A) = 2$, concretamente aplicando eliminación de Gauss intercambiando las dos primeras filas:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 2 & 3 & -1 \\ -1 & 1 & -7 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 3 & -9 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 3 & -9 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Por tanto el sistema tiene infinitas soluciones y los vectores son linealmente dependientes.

La dependencia lineal de dos vectores se reduce a comprobar que uno es múltiplo del otro. En \mathbb{R}^n esto normalmente se decide a ojo mientras que en \mathbb{C}^n quizá nuestro ojo tenga que trabajar más y pedir ayuda a nuestra mano. Por ejemplo, los vectores $\vec{v}_1 = (1 + i, 1 + 2i, i - 1)^t$ y $\vec{v}_2 = (1 + 2i, 3i - 1, i - 2)^t$ de \mathbb{C}^3 son linealmente dependientes si y solo si $\vec{v}_2 = \frac{1+2i}{1+i} \vec{v}_1$, para que cuadren las primeras coordenadas, y un cálculo muestra que esta relación se cumple.

De la misma forma, los polinomios $P_1 = 2 + x + x^2$ y $P_2 = 3 - x^2$ son linealmente independientes en $\mathbb{R}[x]$ porque no son proporcionales pero $\{P_1, P_2, P_3\}$ con $P_3 = 5 + x$ ya no lo son porque $P_3 = P_1 + P_2$, o equivalentemente $P_1 + P_2 - P_3 = 0$.

La abstracción no nos debe confundir. Decidir la independencia lineal de unos cuantos polinomios o matrices lleva a considerar sistemas homogéneos. Es algo tan simple como en \mathbb{R}^n . Por ejemplo, consideremos los polinomios $P_1 = 1 + x + x^2$, $P_2 = 3 + 5x + x^2$, $P_3 = 7 - x^2 + x^3$ del espacio vectorial $\mathbb{R}[x]$. La ecuación relevante es

$$\lambda_1(1 + x + x^2) + \lambda_2(3 + 5x + x^2) + \lambda_3(7 - x^2 + x^3) = 0 \quad \text{con } \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}.$$

Agrupando los términos del mismo grado,

$$(\lambda_1 + 3\lambda_2 + 7\lambda_3) + (\lambda_1 + 5\lambda_2)x + (\lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3)x^2 + \lambda_3x^3 = 0.$$

El polinomio nulo tiene todos sus coeficientes nulos, por tanto llegamos al sistema homogéneo

$$A\vec{\lambda} = \vec{0} \quad \text{con } A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 7 \\ 1 & 5 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{\lambda} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix}.$$

Está claro que $\text{rg}(A) = 3$ simplemente considerando las tres últimas filas (el rango no puede ser mayor que tres). Entonces el sistema es compatible determinado, solo tiene la solución trivial, y los polinomios P_1, P_2, P_3 resultan ser linealmente independientes.

Ya estamos preparados para dar una definición matemática que concrete la idea de un sistema de medida, una elección de puntos cardinales, en el que no hay redundancia y que permite representar cualquier elemento, cualquier observación, en nuestro espacio.

Dado un espacio vectorial V , se dice que un conjunto $\mathcal{B} \subset V$ es una *base* de V si los vectores de \mathcal{B} son linealmente independientes y $\mathcal{L}(\mathcal{B}) = V$.

Para referirse a esta última propiedad, $\mathcal{L}(\mathcal{B}) = V$, se suele decir que \mathcal{B} es un *sistema de generadores* de V . La razón es obvia: pedimos que todo el espacio se genere con combinaciones lineales de los elementos de \mathcal{B} .

Fijada una base finita⁸ $\mathcal{B} = \{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n\}$ de un espacio vectorial V cada vector $\vec{u} \in V$ se escribe de forma única como $\vec{u} = \lambda_1\vec{v}_1 + \dots + \lambda_n\vec{v}_n$ porque si hubiera dos combinaciones lineales que dieran \vec{u} , al restarlas llegaríamos a algo del tipo (2.1) que contradiría la independencia lineal. Estos λ_j se dice que son las *coordenadas* de \vec{u} en la base \mathcal{B} e incluso a veces se escribe, abusando un poco de la notación, $\vec{u} = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)^t$ especificando la base en la que trabajamos.

En \mathbb{R}^2 la base más sencilla es $\mathcal{B} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ con $\vec{e}_1 = (1, 0)^t$ y $\vec{e}_2 = (0, 1)^t$, llamada la *base canónica*. Se extiende a \mathbb{R}^n y \mathbb{C}^n de manera natural tomando \vec{e}_j con un 1 en el

⁸En este curso solo nos ocuparemos de hacer cálculos con bases finitas y combinaciones lineales finitas, sin embargo hay situaciones de gran interés en ingeniería que se salen de este esquema. Desde el punto de vista matemático son tema de estudio del *análisis funcional*, a medio camino entre el álgebra y el análisis. Su desarrollo estuvo ligado inicialmente a la formalización de la física cuántica.

lugar j y ceros en el resto. Volviendo al ejemplo del principio de la sección, el vector $\vec{u} = (1, 2)^t \in \mathbb{R}^2$ que corresponde a un paso al este y dos al norte es $\vec{u} = \vec{e}_1 + 2\vec{e}_2$. Sin embargo en la base $\mathcal{B}' = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$ con $\vec{v}_1 = (1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})^t$ y $\vec{v}_2 = (0, 1)^t$, que corresponde a usar el noreste y el norte, se tiene $\vec{u} = \sqrt{2}\vec{v}_1 + \vec{v}_2$. Identificando \vec{u} con sus coordenadas, \vec{u} es $(1, 2)^t$ cuando empleamos la base canónica y es $(\sqrt{2}, 1)^t$ cuando usamos la base \mathcal{B}' .

Si tenemos una base con n elementos ($\neq \infty$) lo que hagamos con las combinaciones lineales de vectores potencialmente raros (polinomios, señales, etc.) se traduce fielmente en lo que hagamos con sus vectores de coordenadas que están en K^n , que en el curso serán los familiares \mathbb{R}^n o \mathbb{C}^n . Por si no está claro, aquí va como enunciado teórico:

Lema 2.2.1. *Sea V un espacio vectorial sobre K con una base finita de n elementos y sean $\vec{c}_1, \dots, \vec{c}_m \in K^n$ los vectores formados por las coordenadas de $\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_m \in V$. Entonces $\sum_j \lambda_j \vec{u}_j = \vec{0}$ con $\lambda_j \in K$ si y solo si $\sum_j \lambda_j \vec{c}_j = \vec{0}$.*

El número de grados de libertad de un sistema físico es independiente de la manera en que lo describamos. El análogo en el contexto de los espacios vectoriales es el siguiente resultado-definición:

Proposición 2.2.2. *Todas las bases de un espacio vectorial V tienen el mismo número de elementos. Tal número se llama dimensión de V y se indica con $\dim V$.*

Inciendo en un comentario anterior, podría ocurrir $\dim V = \infty$ pero no vamos a hallar bases en este curso cuando ocurra esto. Si te empeñas mucho en tener un ejemplo, $\{1, x, x^2, x^3, \dots\}$ es una base del espacio de polinomios.

Si ahora leemos con esta notación y con ojos de ver el Teorema 1.2.2, nos percataremos de que nos asegura lo siguiente:

Corolario 2.2.3. *Sea $V = \{\vec{x} \in K^n : A\vec{x} = \vec{0}\}$ con $A \in \mathcal{M}_{m \times n}(K)$. Se cumple $\dim V = n - \text{rg}(A)$.*

En este curso $K = \mathbb{R}$ o $K = \mathbb{C}$ aunque el resultado tiene validez en cualquier cuerpo ya que sumas, restas, multiplicaciones y divisiones es todo lo que necesitamos para hacer y deshacer las transformaciones elementales de la eliminación de Gauss. Una base de V es $\mathcal{B} = \{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_{n-r}\}$ con \vec{v}_j como en el Teorema 1.2.2 y se halla (véase su demostración) asignando parámetros λ_j a las variables correspondientes a las columnas no pivote. Obviamente $\mathcal{L}(\mathcal{B}) = V$ y los \vec{v}_j son linealmente independientes porque en otro caso habría diferentes posibles elecciones de los λ_j dando $\vec{x} = \vec{0}$.

Un ejemplo extremadamente simple es $V = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 : x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0\}$. La matriz del sistema es la matriz fila $(1, 2, 3)$ y por tanto $\text{rg}(A) = 1$, lo que implica $\dim V = 3 - 1 = 2$. A nadie sorprenderá que un plano tenga dimensión dos. Asignando $x_2 = \lambda_1$, $x_3 = \lambda_2$, que corresponden a las columnas no pivote, se tiene que la solución general es

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} -2\lambda_1 - 3\lambda_2 \\ \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} = \lambda_1 \vec{v}_1 + \lambda_2 \vec{v}_2 \quad \text{con} \quad \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Según lo anterior, una base de V es $\mathcal{B} = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$. El vector $\vec{u} = (-7, 2, 1)^t$ pertenece a V y por tanto debe ser combinación lineal de \vec{v}_1 y \vec{v}_2 . El sistema $\vec{u} = \lambda_1 \vec{v}_1 + \lambda_2 \vec{v}_2$ trivialmente conduce a $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 1$. Estas son las coordenadas de \vec{u} en la base \mathcal{B} . Si consideramos \mathcal{B} como nuestro “sistema de medida”, podemos pensar en \vec{u} como en el vector $(2, 1)^t$ de \mathbb{R}^2 .

En la práctica, a menudo sabemos la dimensión o bien por el Corolario 2.2.3 o porque existe una base fácil. Con ello no es necesario comprobar que un candidato a base es sistema de generadores.

Proposición 2.2.4. *Si V es un espacio vectorial con $\dim V = n < \infty$, cualesquiera n vectores linealmente independientes forman una base.*

En el ejemplo anterior sabíamos de manera casi inmediata $\dim V = 2$. Si nos inventamos dos soluciones al azar que no son una múltiplo de la otra, también tendremos una base. Por ejemplo, $\{(1, 1, -1)^t, (1, -2, 1)^t\}$.

Hay una interpretación del rango en términos de dimensiones distinta de la del Corolario 2.2.3 que implica que el rango de una matriz y de su traspuesta coinciden, lo cual suena muy sorprendente porque los cálculos de la eliminación de Gauss sobre A y A^t no guardan ninguna relación. Entender este milagro requiere leer la demostración. Lo hagas o no, conviene que recuerdes a partir de ejemplos anteriores que para cualquier matriz A el producto $A\vec{\lambda}$ es la combinación lineal $\lambda_1 \vec{c}_1 + \dots + \lambda_n \vec{c}_n$ con \vec{c}_j las columnas de A .

Proposición 2.2.5. *Sea $A \in \mathcal{M}_{m \times n}(K)$ entonces $\text{rg}(A)$ es igual a la dimensión del espacio generado por sus columnas y también a la del espacio generado por sus filas. En particular $\text{rg}(A) = \text{rg}(A^t)$.*

Las pruebas de las proposiciones anteriores son sencillas e ilustrativas pero las pospondremos en favor de practicar un poco con ellas.

Como primer ejemplo, calculemos la dimensión y una base del subespacio de \mathbb{C}^3

$$W = \{\vec{x} \in \mathbb{C}^3 : A\vec{x} = \vec{0}\} \quad \text{con} \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 5+i \\ 3 & 2i & 4+2i \\ 4 & -1+4i & 3+3i \end{pmatrix}.$$

Con el fin de evitar fracciones cuando anulamos a_{21} por eliminación de Gauss, combinamos la primera y la segunda transformaciones elementales en $f_2 \mapsto 2f_2 - 3f_1$.

$$\xrightarrow[\substack{f_2 \mapsto 2f_2 - 3f_1 \\ f_3 \mapsto f_3 - 2f_1}]{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 5+i \\ 0 & -3+4i & -7+i \\ 0 & -3+4i & -7+i \end{pmatrix}} \xrightarrow{f_3 \mapsto f_3 - f_2} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 5+i \\ 0 & -3+4i & -7+i \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

De aquí $\text{rg}(A) = 2$ y el Corolario 2.2.3 implica $\dim W = 3 - 2 = 1$. Una base estará formada por cualquier vector no nulo de W . Tomando⁹ $x_3 = 1$ se deduce de la forma escalonada $x_2 = -1 - i$ y $x_1 = -2$ que produce $\mathcal{B} = \{(-2, -1 - i, 1)^t\}$.

⁹Aquí están las cosas preparadas para que $-7 + i$ sea “divisible” por $-3 + 4i$. Si no fuera así y quisiéramos evitar las fracciones y minimizar las cuentas con números complejos, una elección natural sería $x_3 = -3 + 4i$.

Vamos ahora a presentar un enunciado con aspecto bien diferente en el que se utilizan las mismas herramientas. Queremos comprobar que los siguientes subespacios $W_1, W_2 \subset \mathbb{R}^4$ son en realidad iguales:

$$W_1 = \left\{ \vec{x} \in \mathbb{R}^4 : \begin{array}{l} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 - x_3 + 2x_4 = 0 \end{array} \right\} \quad \text{y} \quad W_2 = \mathcal{L}(\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\})$$

con $\vec{v}_1 = (3, 1, -2, -2)^t$ y $\vec{v}_2 = (0, 1, -1, 0)^t$.

Un paso de eliminación de Gauss muestra que la matriz A del sistema en W_1 tiene $\text{rg}(A) = 2$ por tanto $\dim W_1 = 4 - 2 = 2$. Además $A\vec{v}_1 = A\vec{v}_2 = \vec{0}$ implica $\vec{v}_1, \vec{v}_2 \in W_1$. Si mostramos que \vec{v}_1 y \vec{v}_2 son linealmente independientes, serán base tanto de W_1 como de W_2 y se tendrá $W_1 = W_2$. Ahora bien, \vec{v}_1 y \vec{v}_2 no son uno múltiplo del otro, por tanto son linealmente independientes.

El siguiente ejemplo es un problema de un antiguo examen. Es muy sencillo y lo único que podría asustarte es que habla de un espacio de matrices. Se considera

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} \lambda - \mu & 2\lambda \\ \mu & \lambda + \mu \end{pmatrix} : \lambda, \mu \in \mathbb{R} \right\}.$$

Lo que se pedía en el examen era mostrar que es un subespacio de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ y calcular su dimensión. Se tiene

$$\begin{pmatrix} \lambda - \mu & 2\lambda \\ \mu & \lambda + \mu \end{pmatrix} = \lambda A_1 + \mu A_2 \quad \text{con} \quad A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Es decir $W = \mathcal{L}(\{A_1, A_2\})$ y el subespacio generado por dos vectores (en nuestro caso con aspecto de matriz) es obviamente subespacio (si te empeñas en dudar, apela a la Proposición 2.1.1). Está claro que A_1 y A_2 son linealmente independientes ya que $\lambda A_1 + \mu A_2 = O$ implica $\lambda = \mu = 0$, por tanto $\{A_1, A_2\}$ es base y $\dim W = 2$.

Siguiendo con problemas de examen que no involucran subespacios de \mathbb{R}^n , en uno de ellos se pedía mostrar que $\mathcal{B} = \{1, x + 1, (x + 1)^2\}$ es una base de $\mathbb{R}_2[x]$, el espacio vectorial de polinomios reales en x de grado a lo más 2, y calcular las coordenadas de $P = 7 + 4x + x^2$ en dicha base. Claramente $\mathbb{R}_2[x] = \mathcal{L}(\{1, x, x^2\})$ y $1, x, x^2$ son linealmente independientes (un polinomio es nulo cuando los coeficientes de x^j lo son) por tanto $\dim \mathbb{R}_2[x] = 3$. Entonces usando la Proposición 2.2.4, basta probar que los elementos de \mathcal{B} son linealmente independientes. Operando y agrupando por grados se tiene

$$\lambda_1 + \lambda_2(x + 1) + \lambda_3(x + 1)^2 = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + (\lambda_2 + 2\lambda_3)x + \lambda_3x^2.$$

Este es el polinomio nulo solo si $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = \lambda_2 + 2\lambda_3 = \lambda_3 = 0$, lo que implica $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$. Para hallar las coordenadas de P lo igualamos a esta combinación lineal, resultando el sistema $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 7$, $\lambda_2 + 2\lambda_3 = 4$, $\lambda_3 = 1$ cuya solución es $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = (4, 2, 1)$. Estas son las coordenadas de P en la base \mathcal{B} .

Hallar bases en espacios de polinomios no tiene ninguna complicación añadida. Consideremos el subespacio de $\mathbb{C}[x]$ definido por

$$V = \{P \in \mathbb{C}_2[x] : 4x^2P'' + (2 - 4x)P' = P(1)\}.$$

Un polinomio $P = a + bx + cx^2$ de V debe satisfacer

$$4x^2 \cdot 2c + (2 - 4x)(b + 2cx) = a + b + c.$$

Los coeficientes de x^2 se cancelan mientras que los de 1 y x dan lugar al sistema

$$\begin{cases} -a + b - c = 0 \\ -4b + 4c = 0 \end{cases} \quad \text{que es} \quad A\vec{x} = \vec{0} \quad \text{con} \quad A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 0 & -4 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}.$$

Asignando $c = \lambda$ se tiene $b = \lambda$ y $a = 0$, entonces los elementos de V son todos los de la forma $\lambda(0 + 1 \cdot x + 1 \cdot x^2)$ con $\lambda \in \mathbb{C}$ y una base es $\mathcal{B} = \{x + x^2\}$.

Terminamos con las pruebas que faltaban.

Demostración de la Proposición 2.2.2. Veamos que es imposible que haya dos bases $\mathcal{B} = \{\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_n\}$ y $\mathcal{B}' = \{\vec{c}_1, \dots, \vec{c}_m\}$ con $m > n$.

Por la definición de base, $\mathcal{L}(\mathcal{B}) = V$, en particular existen coeficientes a_{ij} tales que

$$\vec{c}_j = a_{1j}\vec{b}_1 + a_{2j}\vec{b}_2 + \dots + a_{nj}\vec{b}_n, \quad 1 \leq j \leq m.$$

Sea $A = (a_{ij})_{i,j=1}^{n,m}$, necesariamente $\text{rg}(A) \leq n$ (a lo más hay un pivote por fila). De este modo, si $n < m$ el sistema $A\vec{\lambda} = \vec{0}$ tiene infinitas soluciones y existen $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ no todos nulos con $\sum_j a_{ij}\lambda_j = 0$. Esto implica $\sum_j \lambda_j \vec{c}_j = \vec{0}$ y contradice la independencia lineal de los \vec{c}_j . \square

Demostración de la Proposición 2.2.4. Si $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n$ son linealmente independientes hay que ver que para cualquier $\vec{u} \in V$ se tiene $\vec{u} \in \mathcal{L}(\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n\})$. Procediendo como en la demostración anterior con $m = n + 1$ y $\vec{c}_1 = \vec{v}_1, \dots, \vec{c}_n = \vec{v}_n, \vec{c}_{n+1} = \vec{u}$, se obtiene $\sum_j \lambda_j \vec{c}_j = \vec{0}$ con λ_j no todos nulos. Si $\lambda_{n+1} \neq 0$ se deduce $\vec{u} = -\lambda_{n+1}^{-1} \sum_{j=1}^n \lambda_j \vec{c}_j \in \mathcal{L}(\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n\})$. El caso $\lambda_{n+1} = 0$ es imposible porque implicaría que $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n$ son linealmente dependientes. \square

Demostración de la Proposición 2.2.5. El Teorema 1.2.2 asegura que si A' es la matriz formada por las $\text{rg}(A)$ columnas pivote de A , el sistema $A'\vec{\lambda} = \vec{0}$ tiene solución única trivial y si añadimos alguna otra columna hay soluciones no triviales, por tanto $\text{rg}(A)$ es la dimensión del espacio generado por las columnas.

Por otro lado, las transformaciones elementales preservan el espacio generado por las filas, no cambian el espacio vectorial de todas sus combinaciones lineales, por tanto su dimensión es la misma que la del espacio generado por las filas de la forma escalonada reducida. Está claro que tal dimensión es el número de filas no nulas, la cual coincide con el número de escalones $\text{rg}(A)$. \square

Exprimiendo el silicio [opcional]. Veamos cómo resolver computacionalmente los dos primeros ejemplos que siguen a la Proposición 2.2.5. En la salida se muestra una fila de guiones separando ambos ejemplos.

Con `matlab/octave` una posibilidad es el siguiente código:

```

1  % Matriz (compleja) A
2  A = [2,1,5+I; 3, 2*I, 4+2*I; 4,4*I-1,3+3*I ];
3  % La dimensión es n-rg(A). n = size(A,1)
4  size(A,1)-rank(A)
5  % Una base es la única columna de
6  null(A)
7
8  disp('-----')
9
10 % Matriz que define W_1
11 A = [1, 1, 1, 1; 1, -1, -1, 2];
12 % Vectores que definen W_2
13 v1 = [3;1;-2;-2]
14 v2 = [0;1;-1;0]
15 % Este producto es la matriz nula por tanto
16 % W_2 está incluido en W_1
17 A*[v1, v2]
18 % Una base de W_1 son las columnas de
19 null(A)
20 % Si añadimos v1 y v2 el rango es dos
21 rank( [null(A) v1 v2])
22 % Por tanto v1 y v2 son combinaciones lineales
23 % de la base de W_1 y se concluye que
24 % W_1 está incluido en W_2.

```

Todo está explicado en los comentarios y los comandos ya han aparecido antes con la excepción de `size(A,1)` que da el número de filas de la matriz A , el de columnas es `size(A,2)`, y de `disp` que muestra (*display*) en pantalla el valor de su argumento.

Quizá las líneas finales merezcan una explicación: Las columnas \vec{b}_1, \vec{b}_2 de la matriz $M = \text{null}(A)$ dan una base de W_1 por tanto $M\vec{\lambda} = \vec{0}$ tiene solución única y $\text{rg}(M) = 2$. Si el rango de la línea 21 se mantiene en 2, entonces $M\vec{\lambda} = \vec{v}_1$ y $M\vec{\lambda} = \vec{v}_2$ también tendrán solución y estos vectores se expresan como combinación lineal de \vec{b}_1 y \vec{b}_2 .

En `sagemath` hay comandos especiales para calcular dimensiones y bases.

```

1  # Matriz (compleja) A
2  A = matrix(3,3, [2,1,5+I, 3, 2*I, 4+2*I, 4,4*I-1,3+3*I ])
3  # Construye el espacio de los que anulan A
4  W = A.right_kernel()
5  # Calcula la dimensión
6  print(W.dimension())
7  # Calcula una base
8  print(W.basis())
9
10 print('-----')
11
12 # Matriz que define W_1
13 A = matrix(QQ,2,4,[1, 1, 1, 1, 1, -1, -1, 2])
14 # Construye W_1
15 W1 = A.right_kernel()
16 # Construye W_2
17 Q4 = VectorSpace(QQ,4)
18 v1 = vector([3,1,-2,-2])
19 v2 = vector([0,1,-1,0])
20 W2 = Q4.span([v1, v2])
21 # ¿Son iguales?
22 print(W1==W2)

```

Incluso, como se muestra en la parte final, es posible preguntar directamente si los dos subespacios son iguales (línea 22). Para la construcción de los subespacios se ha usado

`right_kernel` (línea 15), que da el conjunto de soluciones de un sistema homogéneo y `span` que da $\mathcal{L}(C)$ con C un conjunto de vectores (línea 20). Se ha utilizado \mathbb{Q}^4 en lugar de \mathbb{R}^4 para que no se introduzcan decimales, eso es lo que indica `QQ`. También podría reemplazarse en las líneas 13 y 17 por `SR` que abrevia *symbolic ring* e indica, a grandes rasgos, que no tenemos ganas de especificar dónde trabajamos y queremos que las cuentas sean exactas.

2.3. Aplicaciones lineales

Los espacios vectoriales son la estructura subyacente del álgebra lineal, el marco sobre el que se construye, sin embargo el concepto importante que da sentido a este cimiento es el de aplicación lineal.

Dados espacios vectoriales V y W sobre un mismo cuerpo K , se dice que una función $f : V \rightarrow W$ es una *aplicación lineal* si preserva las combinaciones lineales, es decir, si para $\vec{u}, \vec{v} \in V$, $\lambda, \mu \in K$ cualesquiera $f(\lambda\vec{u} + \mu\vec{v}) = \lambda f(\vec{u}) + \mu f(\vec{v})$.

Si recordamos la definición intuitiva de espacio vectorial, nos daremos cuenta de que, hablando sin rigor, las aplicaciones lineales son las funciones que pasan espacios vectoriales a espacios vectoriales.

Se emplea el nombre *endomorfismo* para indicar $V = W$. Es decir, un endomorfismo es una aplicación lineal de un espacio vectorial en sí mismo. En el ámbito de la ingeniería, V podría ser un espacio formado por señales y un endomorfismo $f : V \rightarrow V$ una manera de procesar las señales con cierto fin.

Igual que la Tierra a nuestra escala nos parece plana o al observar una curva con una lupa de muchos aumentos la confundimos con una recta, los incrementos de cualquier función decente (los analistas las llaman *diferenciables*) de una o varias variables a pequeña escala se aproxima por una aplicación lineal. De esta forma, el álgebra lineal se convierte en una teoría bastante universal de las pequeñas variaciones. Por ejemplo, $f(x, y) = \sin(x - y) + e^{\cos(xy)}$ es una función muy rara pero si nos movemos de $\vec{0} = (0, 0)$ a los puntos cercanos $\vec{u} = (0.03, 0.02)$ y $\vec{v} = (0.05, 0.01)$ se tiene que la función incremento $g(x, y) = f(x, y) - f(0, 0)$ verifica $g(\vec{u}) + g(\vec{v}) = 0.049988\dots$, y $g(2\vec{v}) = 0.079909\dots$, los números son muy similares a $g(\vec{u} + \vec{v}) = 0.049971\dots$ y $2g(\vec{v}) = 0.079977\dots$, que es lo que se obtendría si fuera una aplicación lineal.

Supongamos $V = \mathbb{R}^n$, $W = \mathbb{R}^m$. Si $\{\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n\}$ es la base canónica de V , cada vector $\vec{x} \in V$ es de la forma $\vec{x} = (x_1, \dots, x_n)^t = \sum_j x_j \vec{e}_j$ y se cumplirá $f(\vec{x}) = \sum_j x_j f(\vec{e}_j)$. Dada f , los vectores $f(\vec{e}_j) \in W$ son constantes $f(\vec{e}_j) = (a_{1j}, a_{2j}, \dots, a_{mj})^t$. Por tanto la i -ésima coordenada de $f(\vec{x})$ es $\sum_j a_{ij} x_j$. Con ello hemos probado el siguiente resultado que es la razón de ser de las matrices en álgebra lineal:

Proposición 2.3.1. *Cualquier aplicación lineal $f : K^n \rightarrow K^m$ es de la forma $f(\vec{x}) = A\vec{x}$ con $A \in \mathcal{M}_{m \times n}(K)$. Las columnas de A son los vectores $f(\vec{e}_j)$ con $\{\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n\}$ la base canónica de K^n .*

Una vez más, de cara a los ejemplos de este curso K será \mathbb{R} o \mathbb{C} pero nada impide considerar otros cuerpos, siendo $\mathcal{M}_{m \times n}(K)$ las matrices con elementos en