0.2. Vectores

Hasta ahora para ti un *vector* era una lista ordenada de dos o tres números, sus *coordenadas*. En este curso los vectores serán algo más general, así un polinomio o una señal los consideraremos más adelante como vectores en un espacio adecuado. Antes de meternos en esas finuras, es importante que pienses que los vectores de toda la vida, los que conoces, pueden tener más de tres coordenadas si se trabaja en un espacio de más dimensiones[2]. Entonces representamos un vector de los de siempre por una lista de n números y en álgebra lineal es conveniente que estos números estén escritos en vertical, es decir, como una matriz $n \times 1$, lo cual es un fastidio al escribir un libro o unos apuntes porque las líneas van en horizontal. Un truco que usaré cuando sea necesario es el símbolo de trasposición. El conjunto de todos los vectores formados por n coordenadas se denomina $\mathbb{R}^n$ o $\mathbb{C}^n$, dependiendo de si queremos considerar números reales o complejos. Como ya sabes, habitualmente se indica que algo es un vector escribiendo una flecha sobre su nombre. Así son ejemplos de vectores de toda la vida

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix} = (2,3,5,7)^t \in \mathbb{R}^4 \quad \text{y} \quad \vec{w} = \begin{pmatrix} 1+i \\ i \\ 0 \\ 1 \\ 9 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^5.$$

El vector con todas sus coordenadas cero, llamado *vector nulo*, se suele indicar mediante el símbolo $\vec{0}$.

La manía tan rara de que los vectores ahora estén en vertical proviene de que será conveniente multiplicar matrices por vectores y que resulte otro vector. Concretamente, si consideramos un vector $\vec{v}$ como una matrix $n \times 1$ entonces para $A \in \mathcal{M}_{m\times n}$ se tendrá $A\vec{v} \in \mathcal{M}_{m\times 1}$, es decir, es un vector de m coordenadas. El nuevo vector depende del original de una forma conceptualmente sencilla, que más adelante llamaremos *lineal*. Cada nueva coordenada viene dada por una suma de las antiguas con diferentes coeficientes que indican cuánto participan en el resultado.

En álgebra lineal la razón de ser de las matrices es que funcionan como "máquinas" que pasan vectores a vectores y que respetan ciertas propiedades. Si aceptamos esta manera de entender las matrices, tendremos una explicación acerca de la extraña definición de su multiplicación. Al aplicar la máquina B sobre $\vec{v}$ y después la máquina A al resultado, obtendremos $A(B\vec{v})$. Si queremos que esto sea la máquina AB aplicada a $\vec{v}$, no hay más remedio que definir este producto de la extraña forma habitual.

¿Y cuál es la razón de ser de los vectores? Más claramente, ¿sirven para algo los vectores? A los matemáticos nos deja bastante chafados la pregunta común "¿y esto para qué sirve?" que surge después de que contemos nuestras historias, en parte

[2] Quizá digas "¿Y a mí qué me importan los espacios de dimensiones mayores si vivo en el mundo real, no como los matemáticos?". Como zasca radical, en ciertas situaciones es conveniente considerar que las señales manejadas en telecomunicaciones son vectores de un espacio de ¡infinitas dimensiones! cuyas coordenadas son los valores que toman para cada instante de tiempo.

porque pensamos mayoritariamente que la estética (la belleza) y no la utilidad es la principal justificación de las construcciones matemáticas y en parte porque no sabemos qué responder. Los vectores sirven para representar magnitudes, como las fuerzas en física, en las que no solo es importante el tamaño o intensidad sino también la dirección. Su introducción es relativamente tardía en la historia de las matemáticas, del siglo XIX, y el álgebra lineal no se asentó bien hasta principios del siglo XX, incluso a mediados de siglo no se impartía en todas las universidades, mientras que ahora forma parte de cualquier plan de estudios científico[3].

Si todo esto te parece muy lejano, quizá te acerque un poco a las matrices y vectores saber que en algunas aplicaciones de ingeniería, una señal se representa con un vector. Por ejemplo, sus coordenadas pueden ser los valores de los píxeles de una imagen o las amplitudes de una señal de audio que hemos muestreado. Una matriz procesa la señal de cierta forma cuando se multiplica por ella. En algunos contextos, las matrices se corresponden con filtros llamados lineales.

0.3. Usando el ordenador

Si estás cursando una ingeniería se da por hecho que no tienes alergia a los ordenadores. Entonces te alegrará saber que el álgebra lineal numérica está muy desarrollada. Aunque en este curso nadie te va a obligar a que uses el ordenador para cálculos con matrices, dedicaré esta sección a darte algunos rudimentos sobre cómo hacerlo. Seguro que en otras asignaturas no habrá opción, así que aprender lo básico ahora te puede ahorrar tiempo en el futuro.

De entre el *software* que se emplea en ingeniería con fines académicos el que ha alcanzado una mayor difusión es `matlab` cuyo nombre abrevia *matrix* y *laboratory*, lo que da una idea de que al menos originariamente, tiene casi 40 años, estaba orientado a cálculos con matrices. Actualmente es mucho más versátil, sobre todo cuando se instalan paquetes adicionales, sin embargo las matrices se siguen reflejando en la propia sintaxis y en mi experiencia, quizá sesgada, son los cálculos matriciales lo que mejor hace.

A pesar de que internamente esos cálculos se llevan a cabo con una adaptación de rutinas que hoy son de dominio público, `matlab` es *software* comercial propietario. Un punto a favor es que las licencias para estudiantes no son astronómicas y muchas universidades y departamentos tienen licencias generales (es el caso de la UAM, además lo puedes usar *online* registrándote con tu correo institucional). De todas formas, una alternativa libre y gratuita es (GNU) `octave`. Los comandos y programas básicos son intercambiables hasta el punto de que si no sales del ámbito básico te parecerá que el `octave` que estás usando en casa en tu portátil emula al `matlab`

[3]Una anécdota al respecto es que W. Heisenberg no conocía la multiplicación de matrices y con la ayuda de M. Born, que había seguido cursos de matemáticas en los que aparecía, llegó a una formulación adecuada de su principio de incertidumbre. Llama la atención que alguien que sabía tanta física y matemáticas como Heisenberg no dominara un tema más que obligatorio en primero de grado hoy en día, pero eso fue en 1925 cuando pocos físicos lo hacían.