

Notación y repaso

Después de haber pasado por un exigente proceso de admisión con vistas a ser ingeniero, está claro que has oído hablar de matrices y vectores antes. Aquí vamos a ver una brevísima y somera introducción sobre todo para fijar la notación. Aunque no aprendas nada nuevo, conviene que le des un vistazo.

0.1. Matrices

Una *matriz* $m \times n$ es solo una tabla de números con m filas y n columnas (**altura** \times **base**). En este curso los números serán reales la mayor parte del tiempo pero los números complejos no solo existen en ingeniería sino que son importantes, por tanto no nos olvidaremos del todo de ellos. Por cierto, en algunas aplicaciones al mundo real es interesante considerar también matrices de “números” más exóticos, por ejemplo bits sujetos a operaciones especiales. Denotaremos con $\mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{R})$ al conjunto de todas las matrices reales $m \times n$. Si uno permite números complejos, escribiremos $\mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{C})$ y $\mathcal{M}_{m \times n}$ si no tenemos interés en distinguir los dos casos, o también $\mathcal{M}_{m \times n}(K)$, sobre todo a partir del segundo capítulo donde K será un sobrenombre para \mathbb{R} o \mathbb{C} . Las *matrices cuadradas*, con $m = n$, son más importantes que el resto y se suele abreviar $m \times n$ por m en la notación. Por ejemplo $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ son las matrices reales 2×2 . Se tiene $\mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{R}) \subset \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{C})$ porque $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$, los números reales se pueden considerar complejos con parte imaginaria nula.

Las matrices se suelen denotar con letras mayúsculas y sus *elementos*, los números que la integran, con la letra minúscula correspondiente, indicando con subíndices la fila y la columna, en este orden. Por ejemplo

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 7 & 11 & 13 \end{pmatrix} \implies a_{12} = 3, \quad a_{22} = 11, \quad a_{23} = 13.$$

Muchas veces se escribe $A = (a_{ij})$, o $A = (a_{ij})_{i,j=1}^{2,3}$ si se quiere indicar el número de filas y columnas.

La matriz que tiene todos sus elementos cero se conoce como *matriz nula* y a veces se denota con O . Entre las matrices cuadradas destacan las *diagonales* cuyo nombre se explica por sí solo: son las matrices D con $d_{ij} = 0$ cuando $i \neq j$. Si además $d_{ii} = 1$ para cada i , se dice que tenemos la *matriz identidad*, denotada por I (o por I_n si se quiere indicar su tamaño).

Una operación sobre las matrices que a este nivel parecerá arbitraria¹ es la *trasposición* que consiste en intercambiar filas y columnas. De esta forma, convierte matrices de $\mathcal{M}_{m \times n}$ en matrices de $\mathcal{M}_{n \times m}$. Se suele indicar con el superíndice t . Una cosa curiosa es que para matrices complejas la operación relevante, en relación con la nota a pie de página que quizá acabas de leer, no es la trasposición sino trasponer y después conjugar. Los físicos lo suelen indicar con el superíndice \dagger (*dagger*, daga en inglés) y como se parece mucho a la t la usaré en estas notas aunque sea muy poco frecuente en textos escritos por matemáticos. Por supuesto, para matrices de $\mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{R})$ da igual aplicar t que \dagger . Un par de ejemplos son:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 1 \\ 4 & 6 \end{pmatrix} \Rightarrow A^t = A^\dagger = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 6 & 1 & 6 \end{pmatrix}$$

y

$$B = \begin{pmatrix} 1+i & 2i \\ -i & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow B^t = \begin{pmatrix} 1+i & -i \\ 2i & 1 \end{pmatrix}, B^\dagger = \begin{pmatrix} 1-i & i \\ -2i & 1 \end{pmatrix}$$

donde $i = \sqrt{-1}$.

La suma de dos matrices $A, B \in \mathcal{M}_{m \times n}$ se lleva a cabo de la manera obvia sumando elemento a elemento. La multiplicación de dos matrices solo se define si el número de columnas de la primera coincide con el número de filas de la segunda. Si $A \in \mathcal{M}_{m \times n}$ y $B \in \mathcal{M}_{n \times l}$ entonces $AB \in \mathcal{M}_{m \times l}$. El elemento ij del producto se calcula con la fórmula $\sum_k a_{ik}b_{kj}$. Esto equivale a decir que se hace una operación como la del producto escalar habitual de la fila i de A por la columna j de B y el resultado da lugar al elemento ij . Por ejemplo:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 5 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ -5 & 6 \end{pmatrix}.$$

Te preguntará cómo a alguien en su sano juicio se le puede ocurrir que esta es una manera sensata de multiplicar tablas. Hay una indicación acerca de ello en el siguiente apartado.

En relación con la suma y el producto, la trasposición cumple

$$(A + B)^t = A^t + B^t, \quad \text{y} \quad (AB)^t = B^t A^t.$$

Lo mismo es cierto reemplazando t por \dagger . El cambio de orden en la segunda fórmula no es ninguna tontería porque si por ejemplo $A, B \in \mathcal{M}_n$ es muy inusual que AB y BA coincidan.

Dicho sea de paso, las matrices O e I son claramente elementos neutros de la suma y de la multiplicación de matrices cuadradas. Es decir, $A + O = O + A = A$ y $AI = IA = A$.

¹Si tienes curiosidad, aquí va el *spoiler*: la gracia de esta operación es que tiene que ver con los productos escalares.