Modelo 1 SEGUNDO PARCIAL DE ÁLGEBRA LINEAL 1 de diciembre de 2020

Apellidos y Nombre:..

.... **DNI:**......................................

1) [4 puntos] Señala si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Un acierto cuenta 1 y un fallo descuenta 1/3. No contestar no penaliza.

- V. $\boxed{\text{X}}$ F. $\boxed{}$ Los vectores $\vec{v}_1 = (1+3i, 7+i)^t$ y $\vec{v}_2 = (3+i, i-1)^t$ son ortogonales con el producto escalar de $\mathbb{C}^2$. $(1+3i)(3-i)+(7+i)(-i-1) = (6+8i)+(-6-8i) = 0$.
- V. $\boxed{\text{X}}$ F. $\boxed{}$ Si P_W es la proyección ortogonal sobre W, $P_W(\vec{v}) = \vec{v}$ para $\vec{v} \in W$. Se tiene $\vec{v} = \vec{v} + \vec{0}$ con $\vec{v} \in W$ y $\vec{0} \in W^\perp$.
- V. $\boxed{\text{X}}$ F. $\boxed{}$ Para todos los vectores $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^n$ se cumple $\|\vec{a}-\vec{b}\| \ge \|\vec{a}\| - \|\vec{b}\|$. Se sigue tomando en la desigualdad triangular $\vec{x} = \vec{a} - \vec{b}$ e $\vec{y} = \vec{b}$.
- V. $\boxed{\text{X}}$ F. $\boxed{}$ Si A es una matriz ortogonal, entonces A^2 también lo es. A ortogonal $\Leftrightarrow A^{-1} = A^t \Rightarrow A^{-2} = (A^2)^t \Leftrightarrow A^2$ ortogonal.

2) [3 puntos] Calcula la proyección ortogonal del vector $\vec{v} = (4,5,4)^t \in \mathbb{R}^3$ sobre el siguiente subespacio:

$$W = \big\{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 \,:\, x_1 + 2x_2 + x_3 = 0\big\}.$$

Se tiene $W = \big\{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 \,:\, \vec{x}\cdot\vec{n} = 0\big\}$ con $\vec{n} = (1,2,1)^t$. De aquí, $W^\perp = \mathcal{L}\big(\{\vec{n}\}\big)$ y, según la fórmula para la proyección,

$$P_{W^\perp}(\vec{v}) = \frac{\vec{v}\cdot\vec{n}}{\|\vec{n}\|^2}\vec{n} = \frac{4+10+4}{6}\vec{n} = \begin{pmatrix}3\\6\\3\end{pmatrix}.$$

Por tanto,

$$P_W(\vec{v}) = \vec{v} - P_{W^\perp}(\vec{v}) = \begin{pmatrix}4\\5\\4\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}3\\6\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}.$$

(sigue por detrás)

3) [3 puntos] Halla una <u>base ortonormal</u> de $\mathbb{R}^2$ en la que la siguiente matriz $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ se diagonalice:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

El polinomio característico es

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} -1-\lambda & 1 \\ 1 & -1-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda+1)^2 - 1 = \lambda(\lambda+2).$$

Por tanto hay dos autovalores: $\lambda_1 = 0$ y $\lambda_2 = -2$. Los vectores propios respectivos se hallan con:

$$\begin{pmatrix} -1-0 & 1 \\ 1 & -1-0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow x = y \quad \text{y} \quad \begin{pmatrix} -1+2 & 1 \\ 1 & -1+2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow x = -y.$$

El vector $(1,1)^t$ es solución del primer sistema y $(-1,1)^t$ lo es del segundo (el resto de los autovectores son sus múltiplos no nulos). Ambos son ortogonales y para que formen una base ortonormal basta normalizarlos dividiendo entre su norma:

$$\mathcal{B} = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Apellidos y Nombre: ....

.... **DNI:**......................................

1) [3 puntos] Calcula la proyección ortogonal del vector $\vec{v} = (4,5,4)^t \in \mathbb{R}^3$ sobre el siguiente subespacio:

$$W = \big\{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 \,:\, x_1 + 2x_2 + x_3 = 0\big\}.$$

Se tiene $W = \big\{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 \,:\, \vec{x}\cdot\vec{n} = 0\big\}$ con $\vec{n} = (1,2,1)^t$. De aquí, $W^\perp = \mathcal{L}\big(\{\vec{n}\}\big)$ y, según la fórmula para la proyección,

$$P_{W^\perp}(\vec{v}) = \frac{\vec{v}\cdot\vec{n}}{\|\vec{n}\|^2}\vec{n} = \frac{4+10+4}{6}\vec{n} = \begin{pmatrix}3\\6\\3\end{pmatrix}.$$

Por tanto,

$$P_W(\vec{v}) = \vec{v} - P_{W^\perp}(\vec{v}) = \begin{pmatrix}4\\5\\4\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}3\\6\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}.$$

(sigue por detrás)

2) [3 puntos] Halla una base ortonormal de $\mathbb{R}^2$ en la que la siguiente matriz $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ se diagonalice:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

El polinomio característico es

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} -1-\lambda & 1 \\ 1 & -1-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda+1)^2 - 1 = \lambda(\lambda+2).$$

Por tanto hay dos autovalores: $\lambda_1 = 0$ y $\lambda_2 = -2$. Los vectores propios respectivos se hallan con:

$$\begin{pmatrix} -1-0 & 1 \\ 1 & -1-0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow x = y \quad \text{y} \quad \begin{pmatrix} -1+2 & 1 \\ 1 & -1+2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow x = -y.$$

El vector $(1,1)^t$ es solución del primer sistema y $(-1,1)^t$ lo es del segundo (el resto de los autovectores son sus múltiplos no nulos). Ambos son ortogonales y para que formen una base ortonormal basta normalizarlos dividiendo entre su norma:

$$\mathcal{B} = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

3) [4 puntos] Señala si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Un acierto cuenta 1 y un fallo descuenta 1/3. No contestar no penaliza.

- V. [X] F. [ ] Los vectores $\vec{v}_1 = (1+3i, 7+i)^t$ y $\vec{v}_2 = (3+i, i-1)^t$ son ortogonales con el producto escalar de $\mathbb{C}^2$. $(1+3i)(3-i) + (7+i)(-i-1) = (6+8i) + (-6-8i) = 0$.
- V. [X] F. [ ] Si P_W es la proyección ortogonal sobre W, $P_W(\vec{v}) = \vec{v}$ para $\vec{v} \in W$. Se tiene $\vec{v} = \vec{v} + \vec{0}$ con $\vec{v} \in W$ y $\vec{0} \in W^\perp$.
- V. [X] F. [ ] Para todos los vectores $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^n$ se cumple $\|\vec{a} - \vec{b}\| \geq \|\vec{a}\| - \|\vec{b}\|$. Se sigue tomando en la desigualdad triangular $\vec{x} = \vec{a} - \vec{b}$ e $\vec{y} = \vec{b}$.
- V. [X] F. [ ] Si A es una matriz ortogonal, entonces A^2 también lo es. A ortogonal $\Leftrightarrow A^{-1} = A^t \Rightarrow A^{-2} = (A^2)^t \Leftrightarrow A^2$ ortogonal.

Apellidos y Nombre: ....
.... **DNI:**......................................

1) [3 puntos] Halla una <u>base ortonormal</u> de $\mathbb{R}^2$ en la que la siguiente matriz $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ se diagonalice:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

El polinomio característico es

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} -1-\lambda & 1 \\ 1 & -1-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda+1)^2 - 1 = \lambda(\lambda+2).$$

Por tanto hay dos autovalores: $\lambda_1 = 0$ y $\lambda_2 = -2$. Los vectores propios respectivos se hallan con:

$$\begin{pmatrix} -1-0 & 1 \\ 1 & -1-0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow x = y \quad \text{y} \quad \begin{pmatrix} -1+2 & 1 \\ 1 & -1+2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow x = -y.$$

El vector $(1,1)^t$ es solución del primer sistema y $(-1,1)^t$ lo es del segundo (el resto de los autovectores son sus múltiplos no nulos). Ambos son ortogonales y para que formen una base ortonormal basta normalizarlos dividiendo entre su norma:

$$\mathcal{B} = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

(sigue por detrás)

2) [4 puntos] Señala si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Un acierto cuenta 1 y un fallo descuenta 1/3. No contestar no penaliza.

- V. $\boxed{\text{X}}$ F. $\boxed{}$ Los vectores $\vec{v}_1 = (1+3i, 7+i)^t$ y $\vec{v}_2 = (3+i, i-1)^t$ son ortogonales con el producto escalar de $\mathbb{C}^2$. $(1+3i)(3-i)+(7+i)(-i-1) = (6+8i)+(-6-8i) = 0$.
- V. $\boxed{\text{X}}$ F. $\boxed{}$ Si P_W es la proyección ortogonal sobre W, $P_W(\vec{v}) = \vec{v}$ para $\vec{v} \in W$. Se tiene $\vec{v} = \vec{v} + \vec{0}$ con $\vec{v} \in W$ y $\vec{0} \in W^\perp$.
- V. $\boxed{\text{X}}$ F. $\boxed{}$ Para todos los vectores $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^n$ se cumple $\|\vec{a}-\vec{b}\| \ge \|\vec{a}\| - \|\vec{b}\|$. Se sigue tomando en la desigualdad triangular $\vec{x} = \vec{a} - \vec{b}$ e $\vec{y} = \vec{b}$.
- V. $\boxed{\text{X}}$ F. $\boxed{}$ Si A es una matriz ortogonal, entonces A^2 también lo es. A ortogonal $\Leftrightarrow A^{-1} = A^t \Rightarrow A^{-2} = (A^2)^t \Leftrightarrow A^2$ ortogonal.

3) [3 puntos] Calcula la proyección ortogonal del vector $\vec{v} = (4,5,4)^t \in \mathbb{R}^3$ sobre el siguiente subespacio:

$$W = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 \,:\, x_1 + 2x_2 + x_3 = 0\}.$$

Se tiene $W = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 \,:\, \vec{x} \cdot \vec{n} = 0\}$ con $\vec{n} = (1,2,1)^t$. De aquí, $W^\perp = \mathcal{L}(\{\vec{n}\})$ y, según la fórmula para la proyección,

$$P_{W^\perp}(\vec{v}) = \frac{\vec{v}\cdot\vec{n}}{\|\vec{n}\|^2}\vec{n} = \frac{4+10+4}{6}\vec{n} = \begin{pmatrix}3\\6\\3\end{pmatrix}.$$

Por tanto,

$$P_W(\vec{v}) = \vec{v} - P_{W^\perp}(\vec{v}) = \begin{pmatrix}4\\5\\4\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}3\\6\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}.$$

Apellidos y Nombre:...

.... **DNI:**......................................

1) [4 puntos] Señala si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Un acierto cuenta 1 y un fallo descuenta 1/3. No contestar no penaliza.

- V. $\boxed{\text{X}}$ F. $\boxed{}$ Para todos los vectores $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^n$ se cumple $\|\vec{a} - \vec{b}\| \geq \|\vec{a}\| - \|\vec{b}\|$. Se sigue tomando en la desigualdad triangular $\vec{x} = \vec{a} - \vec{b}$ e $\vec{y} = \vec{b}$.
- V. $\boxed{\text{X}}$ F. $\boxed{}$ Si A es una matriz ortogonal, entonces A^2 también lo es. A ortogonal $\Leftrightarrow A^{-1} = A^t \Rightarrow A^{-2} = (A^2)^t \Leftrightarrow A^2$ ortogonal.
- V. $\boxed{\text{X}}$ F. $\boxed{}$ Los vectores $\vec{v}_1 = (1 + 3i, 7 + i)^t$ y $\vec{v}_2 = (3 + i, i - 1)^t$ son ortogonales con el producto escalar de $\mathbb{C}^2$. $(1 + 3i)(3 - i) + (7 + i)(-i - 1) = (6 + 8i) + (-6 - 8i) = 0$.
- V. $\boxed{\text{X}}$ F. $\boxed{}$ Si P_W es la proyección ortogonal sobre W, $P_W(\vec{v}) = \vec{v}$ para $\vec{v} \in W$. Se tiene $\vec{v} = \vec{v} + \vec{0}$ con $\vec{v} \in W$ y $\vec{0} \in W^\perp$.

2) [3 puntos] Calcula la proyección ortogonal del vector $\vec{v} = (4, 4, 5)^t \in \mathbb{R}^3$ sobre el siguiente subespacio:

$$W = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 \,:\, x_1 + x_2 + 2x_3 = 0\}.$$

Se tiene $W = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 \,:\, \vec{x} \cdot \vec{n} = 0\}$ con $\vec{n} = (1, 1, 2)^t$. De aquí, $W^\perp = \mathcal{L}(\{\vec{n}\})$ y, según la fórmula para la proyección,

$$P_{W^\perp}(\vec{v}) = \frac{\vec{v} \cdot \vec{n}}{\|\vec{n}\|^2}\vec{n} = \frac{4 + 4 + 10}{6}\vec{n} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

Por tanto,

$$P_W(\vec{v}) = \vec{v} - P_{W^\perp}(\vec{v}) = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

(sigue por detrás)

3) [3 puntos] Halla una <u>base ortonormal</u> de $\mathbb{R}^2$ en la que la siguiente matriz $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ se diagonalice:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

El polinomio característico es

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 \\ -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2 - 1 = \lambda(\lambda - 2).$$

Por tanto hay dos autovalores: $\lambda_1 = 0$ y $\lambda_2 = 2$. Los vectores propios respectivos se hallan con:

$$\begin{pmatrix} 1-0 & -1 \\ -1 & 1-0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow x = y \quad \text{y} \quad \begin{pmatrix} 1-2 & -1 \\ -1 & 1-2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow x = -y.$$

El vector $(1,1)^t$ es solución del primer sistema y $(-1,1)^t$ lo es del segundo (el resto de los autovectores son sus múltiplos no nulos). Ambos son ortogonales y para que formen una base ortonormal basta normalizarlos dividiendo entre su norma:

$$\mathcal{B} = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Apellidos y Nombre: ....

.... **DNI:**......................................

1) [3 puntos] Calcula la proyección ortogonal del vector $\vec{v} = (4,4,5)^t \in \mathbb{R}^3$ sobre el siguiente subespacio:

$$W = \big\{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 \,:\, x_1 + x_2 + 2x_3 = 0\big\}.$$

Se tiene $W = \big\{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 \,:\, \vec{x} \cdot \vec{n} = 0\big\}$ con $\vec{n} = (1,1,2)^t$. De aquí, $W^\perp = \mathcal{L}\big(\{\vec{n}\}\big)$ y, según la fórmula para la proyección,

$$P_{W^\perp}(\vec{v}) = \frac{\vec{v}\cdot\vec{n}}{\|\vec{n}\|^2}\vec{n} = \frac{4+4+10}{6}\vec{n} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

Por tanto,

$$P_W(\vec{v}) = \vec{v} - P_{W^\perp}(\vec{v}) = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

(sigue por detrás)

2) [3 puntos] Halla una base ortonormal de $\mathbb{R}^2$ en la que la siguiente matriz $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ se diagonalice:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

El polinomio característico es

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 \\ -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2 - 1 = \lambda(\lambda - 2).$$

Por tanto hay dos autovalores: $\lambda_1 = 0$ y $\lambda_2 = 2$. Los vectores propios respectivos se hallan con:

$$\begin{pmatrix} 1-0 & -1 \\ -1 & 1-0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow x = y \quad \text{y} \quad \begin{pmatrix} 1-2 & -1 \\ -1 & 1-2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow x = -y.$$

El vector $(1,1)^t$ es solución del primer sistema y $(-1,1)^t$ lo es del segundo (el resto de los autovectores son sus múltiplos no nulos). Ambos son ortogonales y para que formen una base ortonormal basta normalizarlos dividiendo entre su norma:

$$\mathcal{B} = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

3) [4 puntos] Señala si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Un acierto cuenta 1 y un fallo descuenta 1/3. No contestar no penaliza.

- V. $\boxed{\text{X}}$ F. $\boxed{}$ Para todos los vectores $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^n$ se cumple $\|\vec{a} - \vec{b}\| \geq \|\vec{a}\| - \|\vec{b}\|$. Se sigue tomando en la desigualdad triangular $\vec{x} = \vec{a} - \vec{b}$ e $\vec{y} = \vec{b}$.
- V. $\boxed{\text{X}}$ F. $\boxed{}$ Si A es una matriz ortogonal, entonces A^2 también lo es. A ortogonal $\Leftrightarrow A^{-1} = A^t \Rightarrow A^{-2} = (A^2)^t \Leftrightarrow A^2$ ortogonal.
- V. $\boxed{\text{X}}$ F. $\boxed{}$ Los vectores $\vec{v}_1 = (1+3i, 7+i)^t$ y $\vec{v}_2 = (3+i, i-1)^t$ son ortogonales con el producto escalar de $\mathbb{C}^2$. $(1+3i)(3-i) + (7+i)(-i-1) = (6+8i) + (-6-8i) = 0$.
- V. $\boxed{\text{X}}$ F. $\boxed{}$ Si P_W es la proyección ortogonal sobre W, $P_W(\vec{v}) = \vec{v}$ para $\vec{v} \in W$. Se tiene $\vec{v} = \vec{v} + \vec{0}$ con $\vec{v} \in W$ y $\vec{0} \in W^\perp$.

Modelo 6 SEGUNDO PARCIAL DE ÁLGEBRA LINEAL 1 de diciembre de 2020

Apellidos y Nombre: ....

.... **DNI:**......................................

1) [3 puntos] Halla una base ortonormal de $\mathbb{R}^2$ en la que la siguiente matriz $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ se diagonalice:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

El polinomio característico es

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 \\ -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2 - 1 = \lambda(\lambda - 2).$$

Por tanto hay dos autovalores: $\lambda_1 = 0$ y $\lambda_2 = 2$. Los vectores propios respectivos se hallan con:

$$\begin{pmatrix} 1-0 & -1 \\ -1 & 1-0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow x = y \quad \text{y} \quad \begin{pmatrix} 1-2 & -1 \\ -1 & 1-2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow x = -y.$$

El vector $(1,1)^t$ es solución del primer sistema y $(-1,1)^t$ lo es del segundo (el resto de los autovectores son sus múltiplos no nulos). Ambos son ortogonales y para que formen una base ortonormal basta normalizarlos dividiendo entre su norma:

$$\mathcal{B} = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

(sigue por detrás)

2) [4 puntos] Señala si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Un acierto cuenta 1 y un fallo descuenta 1/3. No contestar no penaliza.

- V. $\boxed{\text{X}}$ F. $\boxed{}$ Para todos los vectores $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^n$ se cumple $\|\vec{a} - \vec{b}\| \geq \|\vec{a}\| - \|\vec{b}\|$. Se sigue tomando en la desigualdad triangular $\vec{x} = \vec{a} - \vec{b}$ e $\vec{y} = \vec{b}$.
- V. $\boxed{\text{X}}$ F. $\boxed{}$ Si A es una matriz ortogonal, entonces A^2 también lo es. A ortogonal $\Leftrightarrow A^{-1} = A^t \Rightarrow A^{-2} = (A^2)^t \Leftrightarrow A^2$ ortogonal.
- V. $\boxed{\text{X}}$ F. $\boxed{}$ Los vectores $\vec{v}_1 = (1+3i, 7+i)^t$ y $\vec{v}_2 = (3+i, i-1)^t$ son ortogonales con el producto escalar de $\mathbb{C}^2$. $(1+3i)(3-i) + (7+i)(-i-1) = (6+8i) + (-6-8i) = 0$.
- V. $\boxed{\text{X}}$ F. $\boxed{}$ Si P_W es la proyección ortogonal sobre W, $P_W(\vec{v}) = \vec{v}$ para $\vec{v} \in W$. Se tiene $\vec{v} = \vec{v} + \vec{0}$ con $\vec{v} \in W$ y $\vec{0} \in W^\perp$.

3) [3 puntos] Calcula la proyección ortogonal del vector $\vec{v} = (4,4,5)^t \in \mathbb{R}^3$ sobre el siguiente subespacio:

$$W = \big\{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 \, : \, x_1 + x_2 + 2x_3 = 0\big\}.$$

Se tiene $W = \big\{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 \, : \, \vec{x} \cdot \vec{n} = 0\big\}$ con $\vec{n} = (1,1,2)^t$. De aquí, $W^\perp = \mathcal{L}\big(\{\vec{n}\}\big)$ y, según la fórmula para la proyección,

$$P_{W^\perp}(\vec{v}) = \frac{\vec{v} \cdot \vec{n}}{\|\vec{n}\|^2}\vec{n} = \frac{4+4+10}{6}\vec{n} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

Por tanto,

$$P_W(\vec{v}) = \vec{v} - P_{W^\perp}(\vec{v}) = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$