Examen final de álgebra lineal (convocatoria extraordinaria) 17 de junio de 2021

Apellidos y Nombre:..
.... **DNI:**......................................

1) [2 puntos] Calcula la dimensión del núcleo y de la imagen del endomorfismo

$$f:\mathbb{R}^3\longrightarrow\mathbb{R}^3 \quad \text{dado por} \quad f\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x+3y+8z\\x+2y+3z\\2x+3y+z\end{pmatrix}.$$

El endomorfismo se puede escribir como $f(\vec{x})=A\vec{x}$ y aplicando eliminación de Gauss a la matriz A

$$A=\begin{pmatrix}1&3&8\\1&2&3\\2&3&1\end{pmatrix}\xrightarrow[\substack{f_2\mapsto f_2-f_1\\ f_3\mapsto f_3-2f_1}]{}\begin{pmatrix}1&3&8\\0&-1&-5\\0&-3&-15\end{pmatrix}\xrightarrow[f_3\mapsto f_3-3f_2]{}\begin{pmatrix}1&3&8\\0&-1&-5\\0&0&0\end{pmatrix}.$$

Por tanto $\operatorname{rg}(A)=2$. Sabemos que $\dim\operatorname{Im}(f)=\operatorname{rg}(A)$ y $\dim\operatorname{Ker}(f)+\dim\operatorname{Im}(f)=\dim\mathbb{R}^3$. En conclusión, $\dim\operatorname{Im}(f)=2$ y $\dim\operatorname{Ker}(f)=1$.

---

2) [2 puntos] Calcula la proyección ortogonal del vector $(4,7,0)^t\in\mathbb{R}^3$ sobre el subespacio definido por la ecuación $x+2y-z=0$.

Sea V el subespacio y $\vec{v}$ el vector del enunciado. Se tiene que $V^\perp$ está generado por $\vec{n}=(1,2,-1)^t$ y sabemos que $P_V(\vec{v})+P_{V^\perp}(\vec{v})=\vec{v}$. Por tanto,

$$P_V(\vec{v})=\vec{v}-P_{V^\perp}(\vec{v})=\vec{v}-\frac{\vec{v}\cdot\vec{n}}{\|\vec{n}\|^2}\vec{n}=\begin{pmatrix}4\\7\\0\end{pmatrix}-\frac{4\cdot1+2\cdot7}{1+4+1}\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\\3\end{pmatrix}.$$

---

3) [2 puntos] Halla una base ortonormal de $\mathbb{R}^2$ en la que $\begin{pmatrix}16&-12\\-12&9\end{pmatrix}$ se diagonalice.

Calculamos los valores propios:

$$\begin{vmatrix}16-\lambda&-12\\-12&9-\lambda\end{vmatrix}=(144-25\lambda+\lambda^2)-144=\lambda(\lambda-25)\quad\Rightarrow\quad\lambda_1=0,\ \lambda_2=25.$$

Hallamos dos vectores propios correspondientes, que serán ortogonales porque la matriz es simétrica:

$$\begin{pmatrix}16-0&-12\\-12&9-0\end{pmatrix}\vec{v}_1=\vec{0}\xrightarrow[\text{p. ej.}]{}\vec{v}_1=\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix},\qquad\begin{pmatrix}16-25&-12\\-12&9-25\end{pmatrix}\vec{v}_2=\vec{0}\xrightarrow[\text{p. ej.}]{}\vec{v}_2=\begin{pmatrix}4\\-3\end{pmatrix}.$$

Normalizando, esto es, dividiendo entre la norma, se tiene la base ortonormal $\{\vec{v}_1/5,\vec{v}_2/5\}$.

---

4) [2 puntos] Sea V el subespacio de $\mathbb{C}^3$ con base $\{(1,1,-1)^t, (1,2+i,-2)^t\}$. Da una ecuación en x, y, z que determine V.

Sea $a_1x + a_2y + a_3z = 0$ la ecuación buscada. Se debe cumplir para ambos vectores, por tanto debemos resolver

$$\begin{cases} a_1 + a_2 - a_3 = 0, \\ a_1 + (2+i)a_2 - 2a_3 = 0, \end{cases} \quad \xrightarrow[\text{resta}]{} \begin{cases} a_1 + a_2 - a_3 = 0, \\ \qquad (1+i)a_2 - a_3 = 0. \end{cases}$$

Escogiendo por ejemplo $a_3 = 1+i$, se tiene $a_2 = 1$, $a_1 = i$ y la ecuación queda $ix+y+(1+i)z = 0$.

---

5) [2 puntos] Si $A, B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ son simétricas, es decir, $A = A^t$, $B = B^t$, ¿se cumple que el producto AB también lo es? Razona tu respuesta.

Es falso. Un ejemplo de matrices simétricas con producto no simétrico es:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}.$$
