Capítulo 4. El PRODUCTO ESCALAR

4.1 Definición y propiedades

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad \vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

El producto escalar (usual) viene definido por

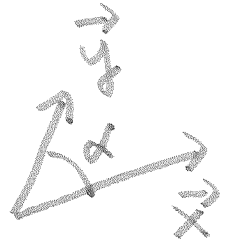
$$\vec{x} \cdot \vec{y} = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_n y_n$$

$$\vec{x} \cdot \vec{y} = \vec{x}^t \, \vec{y} = \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle$$

$$\|\vec{x}\| = \sqrt{\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle}$$

$\|$

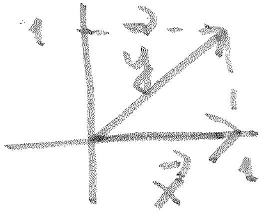
Norma (longitud)



$$\cos\alpha = \frac{\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle}{\|\vec{x}\| \, \|\vec{y}\|}$$

α = ángulo

$0 \leq \alpha \leq \pi$



$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{y} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\|\vec{x}\| = \sqrt{1^2+0^2} = 1$$

$$\|\vec{y}\| = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}$$

$$\cos\alpha = \frac{1\cdot 1 + 0 \cdot 1}{1 \cdot \sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\alpha = \frac{\pi}{4}$$

El producto escalar sirve para medir ángulos y distancias.

En ingeniería es natural (en cierto sentido) para señales $f(t)$, $g(t)$ $a \le t \le b$ definir un producto escalar

$$\langle f, g\rangle = \int_a^b fg \qquad \langle f, g\rangle = \frac{1}{b-a}\int_a^b fg$$

Ej Tensión enchufe $f(t) = A \operatorname{sen}\left(2\pi \frac{t}{T}\right)$

$T = 1/50$. ¿Es $A = 230$ V? No

$$230 = \sqrt{\langle f, f\rangle} = \left(\frac{1}{T}\int_0^T A^2 \operatorname{sen}^2\left(2\pi \frac{t}{T}\right) dt\right)^{1/2} = \frac{A}{\sqrt{2}}$$

$A = 230\sqrt{2}$

Ej En $\mathbb{R}^2$ nos inventamos un nuevo producto escalar

$$\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = 2x_1y_1 + x_2y_2 + x_1y_2 + x_2y_1$$

Los ángulos y distancias son raros: distintos de los habituales

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow \|\vec{x}\| = \sqrt{2}$$

ángulo entre $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\quad \cos\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{2} \cdot 1} \Rightarrow \alpha = \dfrac{\pi}{4}$

En realidad no es tan raro porque es el producto escalar usual cuando usamos

$$\mathcal{B} = \left\{ \vec{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{u}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$V =$ espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$

$\langle\, ,\, \rangle : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$

Decimos que es producto escalar (generalizado) si cumple las propiedades:

1) Lineal en cada argumento

$$\langle \lambda\vec{x} + \mu\vec{y}, \vec{z} \rangle = \lambda \langle \vec{x}, \vec{z} \rangle + \mu \langle \vec{y}, \vec{z} \rangle$$

$$\langle \vec{x}, \lambda\vec{y} + \mu\vec{z} \rangle = \lambda \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle + \mu \langle \vec{x}, \vec{z} \rangle$$

2) Simétrico $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = \langle \vec{y}, \vec{x} \rangle$

3) Definido positivo: $\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle > 0 \quad \vec{x} \in V - \{\vec{0}\}$

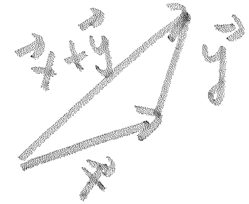
Se puede probar para cualquier producto escalar

- Desigualdad de Cauchy - Schwarz

$$|\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle| \leq \|\vec{x}\| \, \|\vec{y}\|$$

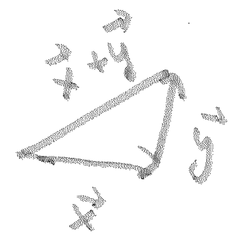
- Desigualdad triangular

$$\|\vec{x} + \vec{y}\| \leq \|\vec{x}\| + \|\vec{y}\|$$



- Teorema de Pitágoras

$$\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = 0 \Rightarrow \|\vec{x}+\vec{y}\|^2 = \|\vec{x}\|^2 + \|\vec{y}\|^2$$



¿Se puede definir el p. escalar en $\mathbb{C}^n$? Sí

¿Es interesante? Sí

El producto escalar usual en $\mathbb{C}^n$ se define como:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad \vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \qquad \vec{x} \cdot \vec{y} = x_1 \overline{y_1} + x_2 \overline{y_2} + \cdots + x_n \overline{y_n}$$

(en otras áreas se intercambian x_j e y_j)

Se pueden definir productos escalares generalizados con las mismas propiedades que en espacios vectoriales sobre $\mathbb{R}$ salvo que:

$$\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = \overline{\langle \vec{y}, \vec{x} \rangle}$$

$$\langle \vec{x}, \lambda \vec{y} + \mu \vec{z} \rangle = \overline{\lambda} \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle + \overline{\mu} \langle \vec{x}, \vec{z} \rangle$$

Ej $\quad \langle f, g \rangle = \int_a^b f \overline{g}$

4.2 Ortogonalidad

$\vec{x}, \vec{y}$ ortogonales $\quad \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = 0$

$\{\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n\}$ ortogonales $\langle \vec{u}_i, \vec{u}_j \rangle = 0 \quad i \neq j.$

Geométricamente ortogonal = perpendicular

$\{\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n\}$ ortonormales $\quad$ ortogonales + unitarios

unitarios $\|\vec{u}_i\| = 1 \quad (\langle \vec{u}_i, \vec{u}_i \rangle = 1)$

ortogonales

Las bases ortonormales son interesantes

porque permiten calcular rápido coordenadas.

$\mathcal{B} = \left\{ \vec{u}_1 = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix}, \vec{u}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} \right\}$ Es base ortogonal de $\mathbb{R}^2$

$\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2 = 6 \cdot 2 + 4(-3) = 0$

No es ortonormal $\|\vec{u}_1\| = \sqrt{36+16} = 2\sqrt{13}$ $\quad \|\vec{u}_2\| = \sqrt{13}$

$\vec{x} \longmapsto \dfrac{\vec{x}}{\|\vec{x}\|}$ vector cualquiera $\xrightarrow[\text{normalización}]{}$ unitario

$\mathcal{B} = \left\{ \frac{1}{2\sqrt{13}} \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{13}} \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} \right\}$ base ortonormal de $\mathbb{R}^2$

$\mathcal{B} = \left\{ \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 4 \\ -7 \\ 4 \end{pmatrix}, \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 8 \end{pmatrix} \right\}$ base ortonormal de $\mathbb{R}^3$

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 4+3i \\ 4 \\ -2+6i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 4-3i \\ -2-6i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2+6i \\ -2-6i \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

es base ortogonal de $\mathbb{C}^3$

$$\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2 = (4+3i)\overline{4} + 4\,\overline{(4-3i)} + (-2+6i)\,\overline{(-2-6i)}$$

$$= \underbrace{(4+3i)4 + 4(4+3i)}_{32+24i} + \underbrace{(-2+6i)(-2+6i)}_{4+(-36)-24i} = 0$$

$$\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_3 = \vec{u}_2 \cdot \vec{u}_3 = 0 \quad \text{(otros cálculos)}$$

$$\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_1 = \underbrace{(4+3i)(4-3i)}_{25} + \underbrace{4 \cdot 4}_{16} + \underbrace{(-2+6i)(-2-6i)}_{40} \neq 1$$

No es ortonormal

En $\mathbb{R}^2$ $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} b \\ -a \end{pmatrix}$ son ortogonales

¿Por qué son interesantes las bases ortogonales/ortonormales?

- Permiten calcular rápido coordenadas
- ~~No ha~~ La indepencia lineal es automática.

<u>Proposición</u> $\{\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n\}$ ortogonales no nulos en un e. vectorial con p. escalar sobre $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$

Entonces son linealmente independientes y si $\vec{x} \in \mathcal{L}(\{\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n\})$

$$\vec{x} = x_1 \vec{u}_1 + x_2 \vec{u}_2 + \dots + x_n \vec{u}_n \quad \text{con} \quad x_j = \frac{\langle \vec{x}, \vec{u}_j \rangle}{\|u_j\|^2}$$

<u>Obs:</u> Si son ortonormales $x_j = \langle \vec{x}, \vec{u}_j \rangle$.

$$x_j = \frac{\langle \vec{x}, \vec{u}_j \rangle}{\|\vec{u}_j\|^2} \qquad \vec{x} = x_1\vec{u}_1 + \dots + x_n\vec{u}_n$$

$\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} \right\}$ base ortogonal de $\mathbb{R}^2$

¿Coordenadas de $\begin{pmatrix} 8 \\ 1 \end{pmatrix}$? Cap2 $\rightarrow$ $\left. \begin{array}{l} 8 = 6x_1 + 2x_2 \\ 1 = 4x_1 - 3x_2 \end{array} \right\}$

Cap3 $\rightarrow$ $x_1 = \frac{52}{52}$, $x_2 = \frac{13}{13}$ $\qquad x_1 = x_2 = 1$

$\mathcal{B} = \left\{ \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 8 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 4 \\ -7 \\ -4 \end{pmatrix}, \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 8 \end{pmatrix} \right\}$ base ortonormal de $\mathbb{R}^3$

$\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 18 \\ 9 \end{pmatrix}$ ¿Coordenadas en $\mathcal{B}$?

$x_1 = \frac{1}{9}(8 \cdot 0 + 4 \cdot 18 + 1 \cdot 9) = 9$

$x_2 = -18$

$x_3 = 0$

En bases ortonormales: coordenadas = P. escalares

En $\mathbb{R}^n$ y $\mathbb{C}^n$ la base canónica es ortonormal
(con el producto escalar usual)

En muchas ocasiones ~~sabe~~ tenemos una base de un subespacio (hallada con los métodos del capítulo 2) pero no es ortogonal.

Hay un algoritmo que la transforma en ortogonal

$$\underset{\text{base no ortogonal}}{\mathcal{B}=\{\vec{v}_1,\dots,\vec{v}_n\}} \xrightarrow[\text{Gram - Schmidt}]{\text{proceso de}} \underset{\text{base ortogonal}}{\mathcal{B}'=\{\vec{u}_1,\dots,\vec{u}_n\}}$$

Obs: $\vec{u}_1=\vec{v}_1$

$$\vec{u}_1 = \vec{v}_1 \qquad \vec{u}_j = \vec{v}_j - \sum_{k=1}^{j-1} \frac{\langle \vec{v}_j, \vec{u}_k \rangle}{\|\vec{u}_k\|^2} \vec{u}_k \qquad j = 2, 3, \ldots, n$$

Proceso Gram-Schmidt

$\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n\}$ no ortogonal $\longrightarrow$ $\{\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_n\}$ ortogonal

$$\mathcal{B} = \left\{ \underset{\vec{v}_1}{\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}, \underset{\vec{v}_2}{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}}, \underset{\vec{v}_3}{\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix}} \right\}$$ base no ortogonal de $\mathbb{R}^3$

$$\vec{u}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{u}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} - \frac{\langle \vec{v}_2, \vec{u}_1 \rangle}{\|u_1\|^2} \vec{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} - \frac{2}{4} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\vec{u}_3 = \vec{v}_3 - \frac{\langle \vec{v}_3, \vec{u}_1 \rangle}{\|\vec{u}_1\|^2} \vec{u}_1 - \frac{\langle \vec{v}_3, \vec{u}_2 \rangle}{\|\vec{u}_2\|} \vec{u}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix} - \frac{6}{4} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{21}{9} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ej $V = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 : x_1 + 2x_2 - 5x_3 = 0\}$

Hallar base ortonormal

$\begin{cases} x_1 = -2\lambda + 5\mu \\ x_2 = \lambda \\ x_3 = \mu \end{cases}$ $\quad \vec{x} = \lambda \underbrace{\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\vec{v}_1} + \mu \underbrace{\begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\vec{v}_2}$ $\quad \mathcal{B} = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2\} \xrightarrow{G-S} \mathcal{B}' = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2\}$

$$\vec{u}_1 = \vec{v}_1 \qquad \vec{u}_2 = \vec{v}_2 - \frac{\langle \vec{v}_2, \vec{u}_1 \rangle}{\|\vec{u}_1\|^2} \vec{u}_1$$

$$\vec{u}_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{u}_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{-10}{2^2+1^2} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

ortonormal $\longrightarrow$ $\left\{ \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

Ej $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ base de $\mathbb{R}_2[x]$

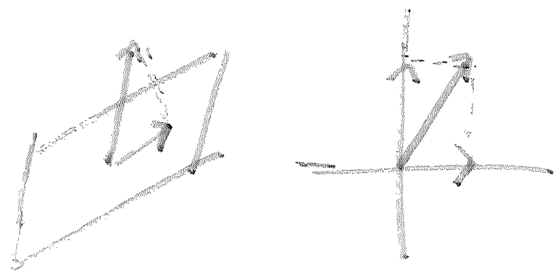
Base ortogonal producto escalar $\langle P, Q \rangle = \int_{-1}^{1} PQ$

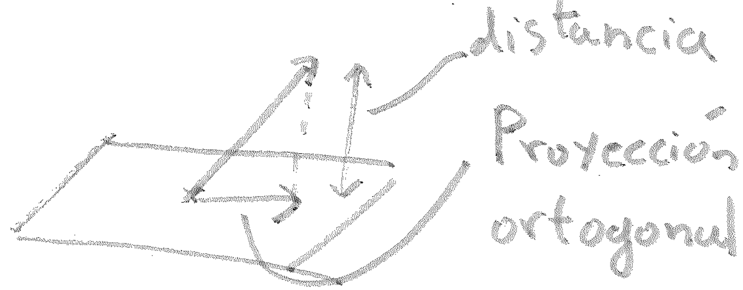
$$P_1 = 1 \qquad P_2 = x - \frac{\langle x, P_1 \rangle}{\|P_1\|^2} P_1 = x - \frac{\int_{-1}^{1} x\,dx}{\int_{-1}^{1} 1^2\,dx} 1 = x$$

$$P_3 = x^2 - \frac{\int_{-1}^{1} x^2 P_1\,dx}{\int_{-1}^{1} P_1^2\,dx} P_1 - \frac{\int_{-1}^{1} x^2 P_2\,dx}{\int_{-1}^{1} P_2^2\,dx} P_2 = x^2 - \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow \mathcal{B}' = \left\{1, x, x^2 - \frac{1}{3}\right\}$$

4.3 La Proyección Ortogonal





V = espacio vectorial $\qquad W \subset V$

W = subespacio de V

Se llama <u>complemento ortogonal</u> de W (en V)

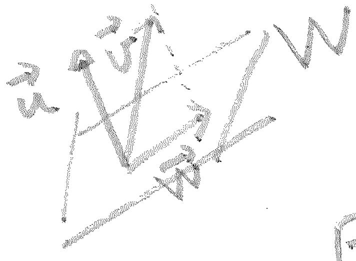
$$W^{\perp} = \{ \vec{v} \in V : \langle \vec{v}, \vec{w} \rangle = 0 \text{ para todo } \vec{w} \in W \}$$

<u>Proposición</u> V = espacio vectorial $\dim V < \infty$ con p. escalar

W = subespacio de V.

Entonces $\dim W + \dim W^{\perp} = \dim V$ $\qquad \vec{w} \in W$

y para cada $\vec{v} \in V$ existe un único $\vec{u} \in W^{\perp}$ con $\vec{v} = \vec{w} + \vec{u}$.



A $\vec{w}$ se le llama <u>proyección ortogonal</u> de $\vec{v}$ sobre W $\qquad \vec{w} = P_W(\vec{v})$

$P_W : V \longrightarrow V$ endomorfismo

$V = W \oplus W^{\perp}$

<u>Proposición</u> Se cumple

1) $\vec{v} = P_W(\vec{v}) + P_{W^\perp}(\vec{v})$

2) $\|\vec{v} - P_W(\vec{v})\| \leq \|\vec{v} - \vec{w}\|$ para todo $\vec{w} \in W$

<u>Obs:</u> $(W^\perp)^\perp = W$

Utilidad de la proposición:

1) Si sé $P_W(\vec{v})$ también sé $P_{W^\perp}(\vec{v})$ y viceversa (calculamos la que sea más fácil).

2) $P_W(\vec{v})$ es la mejor aproximación a $\vec{v}$ dentro de W. Distancia $(\vec{v}, W) = \|\vec{v} - P_W(\vec{v})\|$

Dem 2) $\|\vec{v} - P_W(\vec{v})\| \leq \|\vec{v} - \vec{w}\|$

$\vec{x} = \vec{v} - P_W(\vec{v}) \in W^\perp$ $\qquad$ $\vec{y} = P_W(\vec{v}) - \vec{w} \in W$

$\vec{v} = \underbrace{\vec{u}}_{W^\perp} + \underbrace{\vec{w}}_{= P_W(\vec{v})}$

$\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = 0$

$\underbrace{\|\vec{x} + \vec{y}\|^2}_{\vec{x}+\vec{y} = \vec{v} - \vec{w}} = \|\vec{x}\|^2 + \|\vec{y}\|^2 \geq \|\vec{x}\|^2, \quad \vec{x} = \vec{v} - P_W(\vec{v})$. $\blacksquare$

Nada puede aproximar mejor que la p. ortogonal.

¿Cómo calcular proyecciones ortogonales?

$W \to$ base $\{\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n\}$

$V \to$ base $\{\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n, \dots, \vec{u}_m\}$

Podemos suponer que es ortogonal / ortonormal (Gram-Schmidt) $V = \{ \underbrace{\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n}_{\text{base de } W}, \dots, \vec{u}_m \}$

$\vec{v} = P_W(\vec{v}) + \vec{u}, \quad \vec{u} \in W^\perp$

$P_W(\vec{v}) = \lambda_1 \vec{u}_1 + \dots + \lambda_n \vec{u}_n$

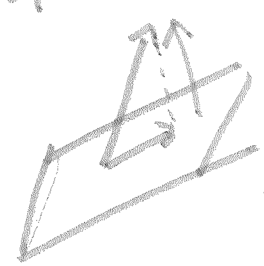
Multiplicando escalarmente por $\vec{u}_j$

$\Rightarrow \langle \vec{v}, \vec{u}_j \rangle = \lambda_j \langle \vec{u}_j, \vec{u}_j \rangle$

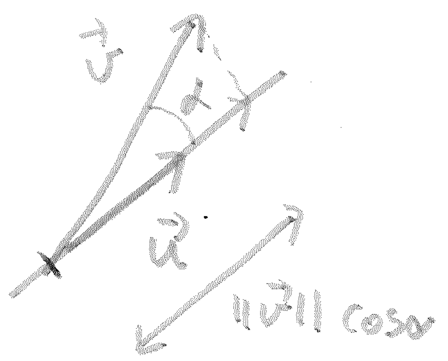
$$\Rightarrow P_W(\vec{v}) = \frac{\langle \vec{v}, \vec{u}_1 \rangle}{\|\vec{u}_1\|^2} \vec{u}_1 + \frac{\langle \vec{v}, \vec{u}_2 \rangle}{\|\vec{u}_2\|^2} \vec{u}_2 + \dots + \frac{\langle \vec{v}, \vec{u}_n \rangle}{\|\vec{u}_n\|^2} \vec{u}_n$$

Interpretación del proceso de Gram-Schmidt

$\vec{u}_j = \vec{v}_j - P_W(\vec{v}_j) \quad W = \mathcal{L}(\{u_1, \dots, u_j\})$



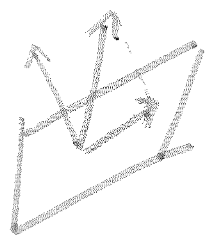
Caso particular $W = \mathcal{L}(\{\vec{u}\})$ $\dim W = 1$



$$P_W(\vec{v}) = \frac{\langle \vec{v}, \vec{u} \rangle}{\|\vec{u}\|^2} \vec{u} \underset{\text{en } \mathbb{R}^n}{=} \frac{\|\vec{v}\| \|\vec{u}\| \cos\alpha}{\|\vec{u}\|^2} \vec{u}$$

Ej $\vec{v} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ p. ortogonal sobre $W = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 : 3x - y - z = 0\}$

$$\vec{v} = P_W(\vec{v}) + P_{W^\perp}(\vec{v})$$



$W^\perp$ es más sencillo que W $(\dim W^\perp = 1)$

$$W^\perp = \mathcal{L}(\{\underbrace{\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}}_{=\vec{u}}\}) \qquad W = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 : \vec{u} \cdot \vec{x} = 0\}$$

$$P_{W^\perp}(\vec{v}) = \frac{\langle \vec{v}, \vec{u} \rangle}{\|\vec{u}\|^2} \vec{u} = \frac{11}{11} \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \longrightarrow P_W(\vec{v}) = \vec{v} - P_{W^\perp}(\vec{v})$$

$$= \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}}$$

Ej (Ahora usando una base ortogonal de W)

$3x-y-z=0$ $\quad$ $x=\lambda+\mu$, $\quad y=3\lambda$, $\quad z=3\mu$ $\quad$ $\vec{x}=\lambda\begin{pmatrix}1\\3\\0\end{pmatrix}+\mu\begin{pmatrix}1\\0\\3\end{pmatrix}$

base no ortogonal de W

G-S $\quad \begin{pmatrix}1\\0\\3\end{pmatrix}-\dfrac{1}{1^2+3^2}\begin{pmatrix}1\\3\\0\end{pmatrix}=\dfrac{1}{10}\begin{pmatrix}9\\-3\\30\end{pmatrix}$

$\vec{u}_1=\begin{pmatrix}1\\3\\0\end{pmatrix}$ $\quad \vec{u}_2=\dfrac{1}{10}\begin{pmatrix}9\\-3\\30\end{pmatrix}\xrightarrow[\frac{10}{3}]{}\begin{pmatrix}3\\-1\\10\end{pmatrix}$ $\quad$ base ortogonal de W

$$P_W(\vec{v})=\frac{\langle\vec{v},\vec{u}_1\rangle}{\|\vec{u}_1\|^2}\vec{u}_1+\frac{\langle\vec{v},\vec{u}_2\rangle}{\|\vec{u}_2\|^2}\vec{u}_2$$

[Exercicio: ver que da lo mismo]

Ej $W \subset \mathbb{R}^4$ $\quad W = \left\{ \vec{x} \in \mathbb{R}^4 : \begin{array}{l} x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 - 3x_2 + x_3 + x_4 = 0 \end{array} \right\}$

Hallemos una base ortogonal de W

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{array}{cccc} & & \lambda & \mu \\ & & \downarrow & \downarrow \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$x_1 = -\lambda + 2\mu$

$x_2 = \mu$ $\qquad \vec{x} = \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$x_3 = \lambda$

$x_4 = \mu$ $\qquad$ base no ortogonal

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{-2}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$P_W\left(\begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ -4 \\ 12 \end{pmatrix} \right) = \frac{-8}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{20}{4} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 5 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Ej (solución alternativa. Atajo general)

$\vec{v} = \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ -4 \\ 12 \end{pmatrix}$ $\quad P_W(\vec{v}) = \lambda_1 \vec{v}_1 + \lambda_2 \vec{v}_2 \quad \{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$ base no necesariamente ortogonal

En el caso anterior $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\vec{v} - P_W(\vec{v}) \in W^\perp$ en particular es ortogonal a $\vec{v}_1$ y $\vec{v}_2$

$$\left.\begin{array}{l} \left(\vec{v} - (\lambda_1 \vec{v}_1 + \lambda_2 \vec{v}_2)\right) \cdot \vec{v}_1 = 0 \\ \left(\vec{v} - (\lambda_1 \vec{v}_1 + \lambda_2 \vec{v}_2)\right) \cdot \vec{v}_2 = 0 \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} -8 - (2\lambda_1 - 2\lambda_2) = 0 \\ 28 - (-2\lambda_1 + 6\lambda_2) = 0 \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{l} 2\lambda_1 - 2\lambda_2 = -8 \\ -2\lambda_1 + 6\lambda_2 = 28 \end{array}\right\} \Longrightarrow \lambda_1 = 1 \quad \lambda_2 = 5$$

$$P_W(\vec{v}) = 1 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 5 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 9 \\ 5 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}}$$

<u>Ej</u> Hallar una base de $W^\perp$ para el W anterior

$$W = \left\{ \vec{x} \in \mathbb{R}^4 : \begin{array}{l} x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 - 3x_2 + x_3 + x_4 = 0 \end{array} \right\} = \left\{ \vec{x} \in \mathbb{R}^4 : \begin{array}{l} \vec{a} \cdot \vec{x} = 0 \\ \vec{b} \cdot \vec{x} = 0 \end{array} \right\}$$

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$ son l.i $\Rightarrow$ base de $W^\perp$

<u>Ej</u> $\vec{v} = \begin{pmatrix} 2+i \\ 1+7i \end{pmatrix}$ p. ortogonal sobre

$W = \{ \vec{x} \in \mathbb{C}^2 : (1+i)x_1 - 3i x_2 = 0 \}$.

Para hallar una base $x_2 = \lambda$ $\quad x_1 = \dfrac{3i\lambda}{1+i}$

$$\vec{x} = \lambda \begin{pmatrix} \frac{3i}{1+i} \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \mathcal{B} = \{\vec{u}\} \quad \vec{u} = \begin{pmatrix} \frac{3i}{1+i} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} + \frac{3}{2}i \\ 1 \end{pmatrix}$$

$3i(1-i) = 3i + 3$

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} 2+i \\ 1+7i \end{pmatrix} \qquad W = \mathcal{L}(\{\vec{u}\}),\quad \vec{u} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2}+\frac{3}{2}i \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$P_W(\vec{v}) = \frac{\vec{v}\cdot\vec{u}}{\|\vec{u}\|^2}\,\vec{u} = \frac{\frac{1}{2}(2+i)(3-3i) + 1+7i}{\frac{9}{4}+\frac{9}{4}+1^2}\begin{pmatrix} \frac{3}{2}+\frac{3}{2}i \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\cancel{(2+i)(3-i) = 6+1+i = 7+i} \qquad \cancel{\frac{\frac{7}{2}+\frac{i}{2}+1+7i}{11/2} = \frac{9+15i}{11}}$$

$$(2+i)(3-3i) = 6+3-3i = 9-3i$$

$$\frac{\frac{9-3i}{2}+1+7i}{11/2} = \frac{11+11i}{11} = 1+i \qquad (1+i)\begin{pmatrix} \frac{3}{2}+\frac{3}{2}i \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{3}{2}(1+i)^2 \\ 1+i \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 3i \\ 1+i \end{pmatrix}}$$

Ej (esquema) $V = \mathbb{R}_2[x]$

$\langle P, Q \rangle = P(-1)Q(-1) + P(0)Q(0) + P(1)Q(1)$

$P_W(x^2)$ $\quad W = \{ P_1 = (x+1)^2 , P_2 = x^2+1 \}$

<u>Método 1</u> Base ortogonal (Gram-Schmidt)

$\mathcal{B} = \{ Q_1 = x^2+2x+1 , Q_2 = 4x^2-9x+4 \}$

$$P_W(x^2) = \frac{\overbrace{\langle x^2, Q_1 \rangle}^{=4}}{\|Q_1\|^2} Q_1 + \frac{\langle x^2, Q_2 \rangle}{\|Q_2\|^2} Q_2 = \frac{4}{9}(x^2+1)$$

<u>Método 2</u> Nos quedamos con $\mathcal{B} = \{P_1, P_2\}$

$x^2 - P_W(x^2) \in W^\perp$ $\qquad P_W(x^2) = \lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2$

$\langle x^2 - (\lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2), P_1 \rangle = 0$ $\qquad \overbrace{\langle x^2, P_1 \rangle}^{=4} - (17\lambda_1 + 9\lambda_2) = 0$

$\langle x^2 - (\lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2), P_2 \rangle = 0$ $\qquad \overbrace{\langle x^2, P_2 \rangle}^{=4} - (9\lambda_1 + 9\lambda_2) = 0$

$\hookrightarrow \lambda_1 = 0 , \lambda_2 = \frac{4}{9} \Rightarrow P_W(x^2) = \frac{4}{9} P_2$

Prop. $W \subset K^n$, $(K = \mathbb{R} \text{ o } \mathbb{C})$

$S =$ matriz cuyas columnas son base de W

Entonces $\quad P_W(\vec{v}) = S(S^t S)^{-1} S^t \vec{v}$

Obs: No muy útil en la práctica.

Ej (repetición) $\quad W = \mathcal{L}\left(\left\{\begin{pmatrix}-1\\0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\1\\0\\1\end{pmatrix}\right\}\right) \qquad \vec{v} = \begin{pmatrix}4\\8\\-4\\12\end{pmatrix}$

$$S = \begin{pmatrix}-1 & 2\\ 0 & 1\\ 1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} \qquad S^t S = \begin{pmatrix}-1 & 0 & 1 & 0\\ 2 & 1 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 0 & 1\\ 1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2 & -2\\ -2 & 6\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 0 & 1\\ 1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} \cdot \frac{1}{4}\begin{pmatrix}3 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & 0 & 1 & 0\\ 2 & 1 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4\\8\\-4\\12\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}9\\5\\1\\5\end{pmatrix}$$

4.4 Matrices ortogonales y unitarias

$f(\vec{x}) = A\vec{x}$ $\qquad f: K^n \longrightarrow K^n$

¿Cuándo preserva el producto escalar usual?

(¿Cuándo preserva las distancia?)

$\mathbb{R}^n \quad \vec{x}\cdot\vec{y} = \vec{x}^t\,\vec{y} \qquad (A\vec{x})^t(A\vec{y}) = x^t A^t A\,\vec{y}$

$\mathbb{C}^n \quad \vec{x}\cdot\vec{y} = \vec{x}^t\,\overline{\vec{y}} \quad \longrightarrow \quad = x^t A^t \overline{A}\,\overline{\vec{y}}$

Para que coincidan $\quad A^tA = I \qquad A^t\overline{A} = I$

$A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \quad A^tA = I$ <u>matrices ortogonales</u>

$A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \quad A^\dagger A = I$ <u>matrices unitarias</u>

$$A^t A = I \iff A A^t A A^{-1} = A A^{-1} \iff A A^t = I$$

$$A^\dagger A = I \iff \text{— —} \iff A A^\dagger = I$$

$$A = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -4 & 3 \end{pmatrix} \qquad A^t A = \frac{1}{25}\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -4 & 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{25}\begin{pmatrix} 25 & 0 \\ 0 & 25 \end{pmatrix} = I$$

A es <u>ortogonal</u> (unitaria si $K = \mathbb{C}$)

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \qquad A^\dagger A = \overline{\begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}} A = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

A es unitaria

$$A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \sqrt{2}+i & -i \\ i & -\sqrt{2}+i \end{pmatrix} \qquad A^\dagger A = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} \sqrt{2}-i & -i \\ i & -\sqrt{2}-i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \sqrt{2}+i & -i \\ i & -\sqrt{2}+i \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{4}\begin{pmatrix} \sqrt{4}+1+1 & 0 \\ i\sqrt{2}-1-i\sqrt{2}+1 & 1+\sqrt{4}+1 \end{pmatrix} = I \quad \text{es unitaria}$$

<u>Prop</u> $A \in \mathcal{M}_n(K)$ es ortogonal ($K=\mathbb{R}$) o unitaria ($K=\mathbb{C}$)

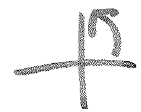
$\Longleftrightarrow$ Las columna de A forman una base ortonormal (para el p. escalar usual).

$$A = \begin{pmatrix} 3/5 & 4/5 \\ -4/5 & 3/5 \end{pmatrix} \qquad \|\vec{v}_1\| = 1 \qquad \|\vec{v}_2\| = 1$$

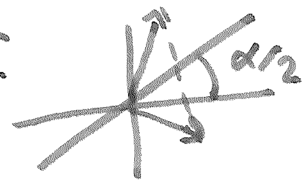
$$\vec{v}_1 \qquad \vec{v}_2 \qquad\qquad \vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = 0$$

Obs: Se puede probar que $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ ortogonal $\Longleftrightarrow$

$\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\operatorname{sen}\alpha \\ \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \longleftrightarrow$ giro de ángulo α alrededor del origen



$\begin{pmatrix} \cos\alpha & \operatorname{sen}\alpha \\ \operatorname{sen}\alpha & -\cos\alpha \end{pmatrix} \longleftrightarrow$ simetría por una recta con ángulo $\alpha/2$ con el eje X.



$A = I_n$ es ortogonal $\quad A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & \end{pmatrix}$ 〃 $\quad A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$

$$\begin{array}{c} A = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 8 & 4 & 1 \\ 4 & -7 & -4 \\ 1 & -4 & 8 \end{pmatrix} \\ \qquad\quad \vec{v}_1 \quad \vec{v}_2 \quad \vec{v}_3 \end{array}$$

es ortogonal

Habíamos visto que $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ es ortonormal

$A^t A = I$