Capítulo 3

DETERMINANTES

3.1 Definición y propiedades

Historia: aparecieron a finales del XVII
→ denominadores al resolver sistemas

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \qquad A\vec{x}=\vec{b}$$

$$x_1=\frac{b_1 a_{22}-b_2 a_{11}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}} \qquad x_2=\frac{b_2 a_{11}-b_1 a_{21}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \text{denominador} = a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$$

En general el denominador es común para todas las x_j $\Longleftrightarrow$ determinante

Sistemas con matrices cuadradas determinante nulo $\Longleftrightarrow$ no hay solución única

<u>Def</u> $A \in \mathcal{M}_n(K)$ su determinante $|A|$ (ó $\det(A)$) como $|a_{11}| = a_{11}$ si $n=1$ y para $n>1$

$$|A| = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} a_{i1} d_i$$

d_i = determinante al suprimir la 1ª columna y la i-ésima fila de A.

Ej: $n=2$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = (-1)^0 a_{11} \begin{vmatrix} \cancel{a_{11}} & \cancel{a_{12}} \\ \cancel{a_{21}} & a_{22} \end{vmatrix} + (-1)^1 a_{21} \begin{vmatrix} \cancel{a_{11}} & a_{12} \\ \cancel{a_{21}} & \cancel{a_{22}} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11} a_{22} - a_{21} a_{12}$$

$n=3$

$$|A| = (-1)^0 a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + (-1)^1 a_{21} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$+ (-1)^2 a_{31} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}$$

<u>Lema:</u> $A, B, C \in \mathcal{M}_n(K)$ iguales salvo que una fila ~~fila~~ de C es combinación lineal de las filas correspondientes de A y B.

$f_k(C) = \lambda f_k(A) + \mu f_k(B)$ Entonces $|C| = \lambda |A| + \mu |B|$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} -1 & -4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$4(1,-1) + (-5)(1,0) = (-1,-4)$$

$$4 f_1(A) - 5 f_1(B) = f_1(C)$$

$$|A| = 5 \qquad |B| = 3 \qquad |C| = 5$$

$$4 \cdot 5 - 5 \cdot 3 = 5$$

El interés de este lema es que permite (de forma no inmediata) deducir cómo se comportan los determinantes mediante transf. elementales.

Proposición $A \in \mathcal{M}_n(K)$

a) Al sumar a una fila un múltiplo de otra el determinante no varía.

b) Al multiplicar una fila por un número, el determinante se multiplica por ese número

c) Al intercambiar dos filas el determinante cambia de signo.

Además si A es escalonada $|A|$ es el producto de los elementos de la diagonal $a_{11} a_{22} \cdots a_{nn}$

CONCLUSIÓN: LOS DETERMINANTES SE PUEDEN CALCULAR CON GAUSS.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 4 \\ -1 & 4 & 22 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Con la def (o como uno sepa)

$$|A| = 2\begin{vmatrix} 4 & 22 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} - (-1)\begin{vmatrix} 6 & 4 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} 6 & 4 \\ 4 & 22 \end{vmatrix}$$

$$= -96 \quad - 14 \quad + 116 \quad = \boxed{6}$$

$$\underset{f_1 \mapsto \frac{f_1}{2}}{|A| = 2}\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -1 & 4 & 22 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} \underset{\substack{f_2 \mapsto f_2 + f_1 \\ f_3 \mapsto f_3 - f_1}}{=} 2\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 7 & 24 \\ 0 & -1 & -3 \end{vmatrix} \underset{f_3 \mapsto f_3 + \frac{f_2}{7}}{=} 2\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 7 & 24 \\ 0 & 0 & \frac{3}{7} \end{vmatrix} = 2 \cdot 1 \cdot 7 \cdot \frac{3}{7} = \boxed{6}$$

$$\underset{f_2 \leftrightarrow f_3}{=} -2\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & -3 \\ 0 & 7 & 24 \end{vmatrix} \underset{f_3 \mapsto f_3 + 7f_2}{=} -2\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = (-2) \cdot 1 \cdot (-1) \cdot 3 = \boxed{6}$$

<u>Obs:</u> • fila nula $\Longrightarrow$ $\det = 0$ $\quad (|A| = 2|A|)$

• dos filas iguales $\Longrightarrow$ $\det = 0$ $\quad (|A| = -|A|)$

Un resultado mucho más profundo que la proposición anterior es:

<u>Proposición</u> $\quad A, B \in \mathcal{M}_n(K)$

$$|AB| = |A|\,|B|$$

$$|A| = |A^t|$$

$$=$$

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 5 \\ 11 & 8 \end{pmatrix} \qquad A^t = \begin{pmatrix} 7 & 11 \\ 5 & 8 \end{pmatrix} \qquad |A| = |A^t| = 1$$

$$A^2 = \begin{pmatrix} 7 & 5 \\ 11 & 8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 7 & 5 \\ 11 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 104 & 75 \\ 165 & 119 \end{pmatrix} \qquad |A^2| = |AA| = |A|^2 = 1^2 = 1$$

<u>Idea:</u> ¿por qué es "natural" que se cumpla $|A|=|A^t|$ y $|AB|=|A|\,|B|$? (solo si te gustan ~~les~~ saber el porqué de las cosas)

$$A\vec{x}=\vec{b} \to x_1=\frac{\cdots}{|A|},\ \cdots,\ x_n=\frac{\cdots}{|A|}$$

$$A\underbrace{B\vec{x}}_{\vec{y}}=\vec{b} \to y_1=\frac{\cdots}{|A|},\ \cdots,\ y_n=\frac{\cdots}{|A|}$$

$$B\vec{x}=\vec{y}=\frac{1}{|A|}\begin{pmatrix}\cdots\\ \cdots\\ \vdots\end{pmatrix} \Rightarrow x_1=\frac{\cdots}{|A|\,|B|},\ \cdots,\ x_n=\frac{\cdots}{|A|\,|B|}$$

$$(AB)\vec{x}=\vec{b} \longrightarrow x_1=\frac{\cdots}{|AB|},\ \cdots,\ x_n=\frac{\cdots}{|AB|}$$

$|A| = |A^t| \Rightarrow$ en lugar de utilizar la 1^a columna ~~fila~~ en la def de determinante podría usar la 1^a fila

De hecho por la prop. sobre Gauss podría usar cualquiera (intercambiar filas o columnas)

$$\begin{vmatrix} + & - & + & - & \cdots \\ - & + & & & \\ + & - & & & \\ - & + & & & \\ \vdots & \vdots & & & \end{vmatrix}$$

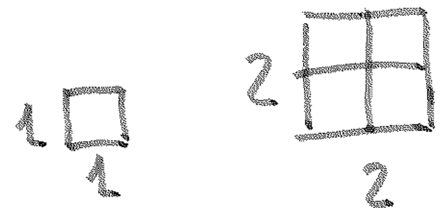
$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 7 \\ 4 & 1 & 20 \\ 1 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -1$$

$$= 2 \begin{vmatrix} 1 & 20 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} + 7 \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}$$

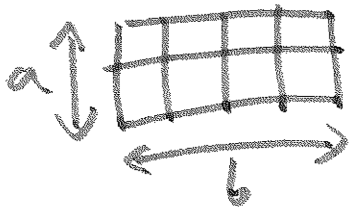
$$2 \cdot 3 \quad + 7(-1) = -1$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 & 70 \\ 1 & 0 & 2 \\ 13 & 0 & 20 \end{vmatrix} = -4 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 13 & 20 \end{vmatrix} = 24.$$

3.2 Significado geométrico



Área del cuadrado $= l^2$



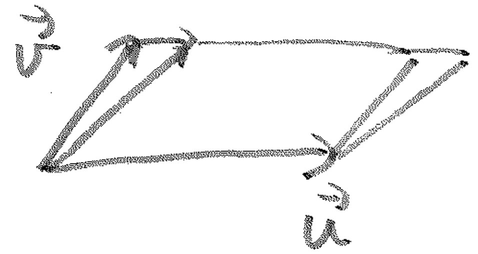
Área del rectángulo $= ab$

$\parallel$

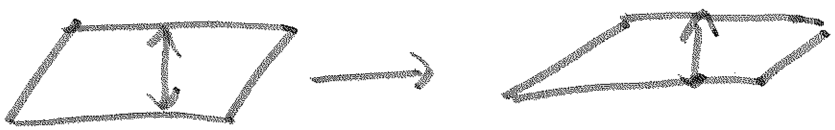
Área paralelogramo

Área del triángulo $= \frac{1}{2}ab$

$M = \begin{pmatrix} \vec{u} \\ \vec{v} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$



1ª tr. elemental

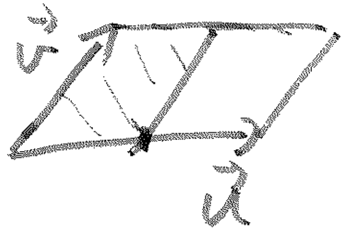


El área se conserva

2^a tr elemental $\vec{u} \leftrightarrow \vec{v}$

El paralelogramo es el mismo

$\Rightarrow$ el área se conserva.



3^a tr. elemental $\vec{u} \mapsto \lambda\vec{u}$

$\Rightarrow$ el área se multiplica por λ

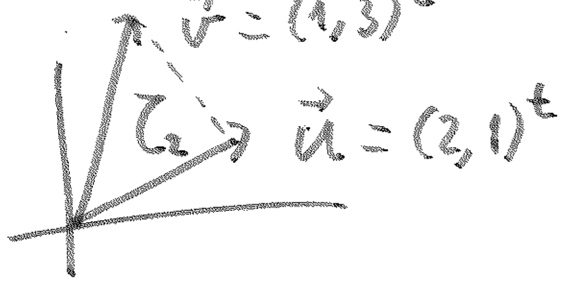
Este es el mismo comportamiento del determinante salvo el signo (2^a tr. el.)

$$\text{Área}(\mathcal{P}_2) = |\det(\vec{u}|\vec{v})| \qquad |-3| = 3$$

$\mathcal{P}_2$ = paralelogramo determinado por $\vec{u}$ y $\vec{v}$

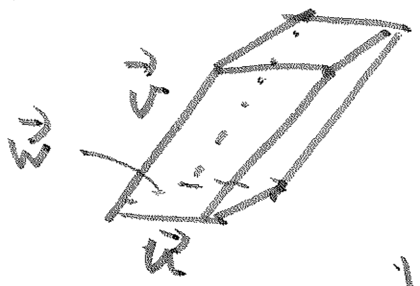
$$\text{Área}(\mathcal{T}_2) = \frac{1}{2}|\det(\vec{u}|\vec{v})|$$

$\mathcal{T}_2$ = triángulo determinado por $\vec{u}$ y $\vec{v}$



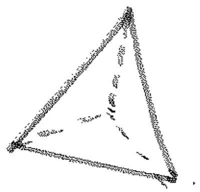
$$A(\tau_2) = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = \frac{5}{2}$$

$$A(\tau_2) = \frac{1}{2}\left\|\begin{matrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{matrix}\right\| = \frac{1}{2}|-5| = \frac{5}{2}$$



$\mathcal{P}_3$ = paralelepípedo generado por $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^3$

$$\text{Volumen}(\mathcal{P}_3) = |\det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})|$$



$$\underbrace{\text{Volumen}(\tau_3)}_{\text{tetraedro}} = \frac{1}{6}|\det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})|$$

Los siguientes vértices determinan un tetraedro regular de arista = 1

$(0,0,0)$ $\underset{\vec{u}}{\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}, 0, \frac{\sqrt{6}}{3}\right)}$, $\underset{\vec{v}}{\left(\frac{\sqrt{3}}{6}, -\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{6}}{3}\right)}$ $\underset{\vec{w}}{\left(\frac{\sqrt{3}}{6}, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{6}}{3}\right)}$

¿Cuál es la fórmula para el volumen del tetraedro regular de arista a?

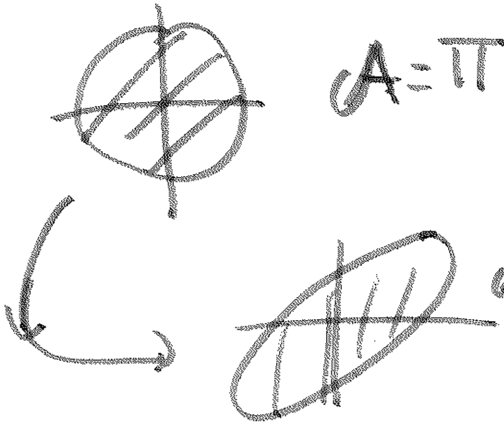
$$V(\tau_3) = \frac{1}{6}\left|\det(a\vec{u}, a\vec{v}, a\vec{w})\right| = \frac{a^3}{6}\left|\det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})\right|$$

$$= \frac{a^3}{6}\left|\begin{vmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{3} & 0 & \frac{\sqrt{6}}{3} \\ \sqrt{3}/6 & -\frac{1}{2} & \sqrt{6}/3 \\ \sqrt{3}/6 & \frac{1}{2} & \sqrt{6}/3 \end{vmatrix}\right| = \frac{\sqrt{2}}{12} a^3$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}}_{= A} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (x'-y')/2 \\ (5y'-3x')/2 \end{pmatrix}$$

$$x^2+y^2 \leq 1 \longleftrightarrow \left(\frac{x'-y'}{2}\right)^2 + \left(\frac{5y'-3x'}{2}\right)^2 \leq 1$$



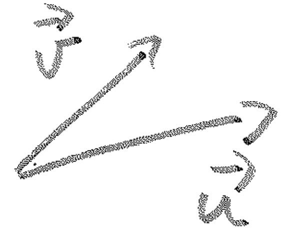
$\mathcal{A} = \pi$

$\mathcal{A}' = ¿?$

Las áreas se multiplican por $|A| = 5-3 = 2$

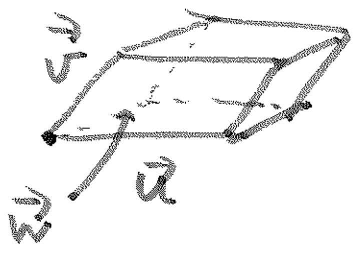
$\Rightarrow \quad \mathcal{A}' = 2\mathcal{A} = 2\pi$

El determinante de la matriz de una aplicación lineal da la proporción en la que modifica áreas, volúmenes, ...



$\mathbb{R}^2$ Área paralelogramo $|\det(\vec{u}|\vec{v})|$

Área triángulo $\frac{1}{2}|\det(\vec{u}|\vec{v})|$



$\mathbb{R}^3$ Volumen paralelepípedo $|\det(\vec{u}|\vec{v}|\vec{w})|$

Volumen tetraedro $\frac{1}{6}|\det(\vec{u}|\vec{v}|\vec{w})|$

$f(\vec{x}) = A\vec{x}$ en $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$

$\mathcal{R}$ = región en $\mathbb{R}^2$ Área de $f(\mathcal{R}) = \|A\|$ Área de $\mathcal{R}$

$\mathcal{C}$ = cuerpo en $\mathbb{R}^3$ Volumen de $f(\mathcal{C}) = \|A\|$ Volumen de $\mathcal{C}$

$f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $f: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$

3.3. Regla de Cramer, inversa y rango

Teorema (regla de Cramer) $A\vec{x}=\vec{b}$ $\quad A \in \mathcal{M}_n(K)$

Suponemos que es compatible determinado

A_j = Matriz A cambiando la columna j por $\vec{b}$

entonces la solución es $x_j = \dfrac{|A_j|}{|A|}$

Ej $\begin{cases} 2x+y=5 \\ 3x+2y=8 \end{cases}$ $\quad x = \dfrac{\begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 8 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}}$ $\quad y = \dfrac{\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 8 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}}$

$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ $\quad x = \dfrac{2}{1} = 2$ $\quad y = \dfrac{1}{1} = 1$

$A \in \mathcal{M}_n(K)$ $\quad a_{ij} \longrightarrow$ cofactor o adjunto A_{ij}

$A_{ij} = (-1)^{i+j} d_{ij}$ $\quad d_{ij} =$ determinante de A quitando la fila i y la columna j.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 7 \end{pmatrix} \qquad A_{11} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 7 \end{vmatrix} = 7 \qquad A_{12} = -\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 7 \end{vmatrix} = -20$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

<u>Proposición:</u> $A \in \mathcal{M}_n(K)$ $\quad l, k \in \{1, 2, \dots, n\}$

$$|A| = \sum_{i=1}^{n} a_{ik} A_{ik} = \sum_{j=1}^{n} a_{lj} A_{lj}$$

<u>Dem:</u> $k=1 \to$ def determinante

en otros casos $\to$ desarrollar por otra fila o columna. ∎

$$|A| = \sum_{i=1}^{n} a_{ik} A_{ik} \qquad (AB)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} b_{ki}\, a_{ik} \qquad \text{con } b_{ij} = A_{ji}$$

$$\Longrightarrow \qquad B \cdot A = \begin{pmatrix} |A| & & 0 \\ & |A| & \\ 0 & & \ddots \; |A| \end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \frac{B}{|A|}$$

No inmediato

<u>Teorema</u> $A \in \mathcal{M}_n(K)$ $|A| \neq 0$ su matriz inversa es la traspuesta de la formada por los adjuntos dividida por $|A|$.

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 7 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{-7}\begin{pmatrix} 7 & -20 & -1 \\ -7 & 13 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}^{t} = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} -7 & 7 & 0 \\ 20 & -13 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$|A| = 14 + 1 + 0 - 1 - 0 - 21 = -7$

¿Por qué se cumple la regla de Cramer?

$A\vec{x} = \vec{b}$ $\quad \vec{x} = A^{-1}\vec{b}$ $\quad B = A^{-1}$ $\quad B \to b_{ij} = \frac{A_{ji}}{|A|}$

$$\vec{x} = B\vec{b} \Rightarrow x_j = \sum_{k=1}^{n} b_{jk} b_k = \frac{1}{|A|} \underbrace{\sum_{k=1}^{n} b_k A_{kj}}_{\text{desarrollo de } A_j \text{ por la columna } k}$$

$$\Rightarrow x_j = \frac{|A_j|}{|A|}$$

<u>Teorema</u> $A \in \mathcal{M}_n(K)$.

$rg(A) = k \iff$ existe un menor de tamaño k no nulo y todos los menores de dimensión mayor (si existen) son nulos.

Menor $\rightarrow$ determinante de una submatriz cuadrada.
(elegir los elementos de k filas y k columnas)

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow rg(A) = 2$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow rg(B) \geq 2$$

$$|B| = 0 \Rightarrow rg(B) = 2$$

$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$ $\quad rg(C) \geq 1$

Todas las filas son proporcionales $\Rightarrow$ todos los menores de orden 2 son $\begin{vmatrix} a & \lambda a \\ b & \lambda b \end{vmatrix} = 0$

$\Rightarrow rg(C) = 1$

$A \in \mathcal{M}_n(K)$

$rg(A) = n \iff A$ invertible $\iff |A| \neq 0$

- Los determinantes se pueden calcular con Gauss
- $|A^t| = |A| \qquad |AB| = |A|\,|B|$
- Los determinantes sirven para hallar áreas y volúmenes
- También para resolver $A\vec{x} = \vec{b}$, hallar A^{-1} y $rg(A)$.