

Capítulo 3

Determinantes

3.1. Definición y propiedades

Los determinantes aparecieron a finales del siglo XVII, muchísimo antes de que se desarrollara el álgebra lineal¹. Con el lenguaje actual la motivación era saber qué debe cumplir una matriz cuadrada $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ para que el sistema $A\vec{x} = \vec{b}$ tenga solución única. Nosotros sabemos que la respuesta es $\text{rg}(A) = n$ o equivalentemente que A sea invertible (Corolario 1.2.4, Proposición 1.3.2). Esto estaba demasiado lejos de la teoría de aquellos tiempos remotos y querían, al igual que desean muchos alumnos hoy en día, una fórmula.

El caso $n = 1$ es trivial, $x_1 = b_1/a_{11}$ para $a_{11} \neq 0$. Si $a_{11} = 0$ la ecuación sería del tipo $0x_1 = b_1$ que no tiene solución ($b_1 \neq 0$) o tiene infinitas ($b_1 = 0$). En el caso $n = 2$, aprovechando las cuentas que hicimos para el cálculo de la matriz inversa, se obtiene

$$(3.1) \quad x_1 = \frac{b_1 a_{22} - b_2 a_{12}}{a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}} \quad \text{y} \quad x_2 = \frac{b_2 a_{11} - b_1 a_{21}}{a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}}$$

cuando $a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21} \neq 0$ y de nuevo se puede mostrar que si no se cumpliera esto el sistema dejaría de ser compatible determinado. Para $n = 3$ los cálculos son muy largos y llevan a complicadas expresiones del tipo

$$(3.2) \quad x_1 = \frac{\text{num.1}}{d}, \quad x_2 = \frac{\text{num.2}}{d} \quad \text{y} \quad x_3 = \frac{\text{num.3}}{d}$$

donde los numeradores num._j son funciones lineales en \vec{b} y en cada una de las columnas de A mientras que el denominador d tiene la apabullante fórmula:

$$(3.3) \quad a_{11} a_{22} a_{33} - a_{11} a_{23} a_{32} + a_{12} a_{23} a_{31} - a_{12} a_{21} a_{33} + a_{13} a_{21} a_{32} - a_{13} a_{22} a_{31}.$$

Una vez más resulta que la no anulación de este denominador es la condición necesaria y suficiente para que el sistema tenga solución única.

¹En https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/HistTopics/Matrices_and_determinants/ hay información sobre la historia de los determinantes, especialmente sobre quiénes participaron en su desarrollo.

Los determinantes surgieron históricamente como estos denominadores asociados a la resolución de sistemas de ecuaciones lineales. En su didáctica actual hay dos presentaciones principales, una más abstracta (por ejemplo en [9], [14] y en gran medida en [17]) que consiste en dar la expresión que generaliza (3.3) para el caso n y probar que tiene las propiedades que deseamos sobre los sistemas; la otra más intuitiva (por ejemplo en [12], [22] y [13]) introduce los determinantes a través de la resolución de sistemas por eliminación de Gauss y en algún momento llega a una fórmula abstracta para completar la teoría. La desventaja del primer enfoque es que la expresión surge de la nada y requiere ciertos complementos algebraicos, a cambio es más elegante. El mayor problema del segundo enfoque es que es menos directo y, aunque suene a broma, la existencia de los determinantes no resulta obvia (mira los títulos de [12, §4.I.4], [22, §3.4]).

Aquí comenzaremos, como en [18], un poco más cerca del primer enfoque pero conservando un nivel más básico que el habitual y pasando rápido a la relación con la eliminación de Gauss con la que probaremos algunas propiedades fundamentales.

Dada $A \in \mathcal{M}_n(K)$ definimos su *determinante*, denotado con $|A|$ o con $\det(A)$, como a_{11} si $n = 1$ y de manera recursiva para $n > 1$ como

$$|A| = \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} a_{i1} d_i$$

donde d_i es el determinante de la matriz que resulta al suprimir la primera columna y la i -ésima fila de A .

Por ejemplo, para $n = 2$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = (-1)^0 a_{11} \det(a_{11}) + (-1)^1 a_{21} \det(a_{12}) = a_{11} a_{22} - a_{21} a_{12}$$

que cuadra con lo obtenido al tratar los sistemas 2×2 . Respecto a la notación, para evitar sobrecargarla, tanto al escribir $|A|$ como $\det(A)$ se omiten los paréntesis de la matriz A escrita en términos de sus elementos.

Para $n = 3$ la definición nos dice

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = (-1)^0 a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + (-1)^1 a_{21} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + (-1)^2 a_{31} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}.$$

Si evaluamos estos tres determinantes con lo que sabemos del caso $n = 2$, obtendremos (3.3).

Posiblemente preferirías una definición explícita en vez de esta recursiva. Tal definición es conocida² aunque algo complicada y por ello la evitamos aquí mezclando

²Aquí va: $|A| = \sum_f (-1)^{v(f)} a_{1f(1)} a_{2f(2)} \cdots a_{nf(n)}$ donde la suma es sobre todas las funciones biyectivas $f : \{1, 2, \dots, n\} \rightarrow \{1, 2, \dots, n\}$, llamadas *permutaciones*, y $v(f)$ es el número de violaciones de desigualdades $f(a) < f(b)$ con $a < b$. Por ejemplo, para $n = 3$ si $f(1) = 1$, $f(2) = 3$, $f(3) = 2$ se tiene $v(f) = 1$ porque $f(2) \not< f(3)$ y si $f(1) = 3$, $f(2) = 2$, $f(3) = 1$ se tiene $v(f) = 3$.

los dos enfoques. Lo que subyace a estas complicaciones es que (3.3) tiene 6 sumandos, para $n = 5$ salen 120 y para $n = 70$ más de 10^{100} .

Para encontrar la conexión con las transformaciones elementales utilizaremos que los determinantes son lineales en cada fila por separado.

Lema 3.1.1. Sean $A, B, C \in \mathcal{M}_n(K)$ matrices iguales salvo que para una de sus filas f_k se cumple $f_k(C) = \lambda f_k(A) + \mu f_k(B)$ con $\lambda, \mu \in K$, entonces $|C| = \lambda|A| + \mu|B|$.

Un ejemplo muy sencillo para comprobar esta relación es

$$4(1, -1) - 5(1, 0) = (-1, -4) \quad \Rightarrow \quad 4 \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} - 5 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & -4 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}.$$

El resultado falla en general si hay más de una fila de C que es combinación lineal de las respectivas de A y B .

Del Lema 3.1.1 deduciremos el buen comportamiento con respecto a la eliminación de Gauss.

Proposición 3.1.2. Para cualquier matriz de $\mathcal{M}_n(K)$:

- a) Si se suma a una fila un múltiplo de otra, el determinante no varía.
- b) Si se multiplica una fila por una constante, el determinante se multiplica por dicha constante.
- c) Si se intercambian dos filas, el determinante cambia de signo.

Además si la matriz es escalonada su determinante es el producto de los elementos de la diagonal.

Por si no estuviera claro, la *diagonal* son los elementos a_{ii} . A veces se le llama diagonal principal para distinguirla de la otra diagonal geométrica que tiene poco interés.

De b) se deduce que una matriz con una fila de ceros tiene determinante nulo. Al combinarlo con a) se obtiene la siguiente generalización:

Corolario 3.1.3. Si una fila de una matriz cuadrada es combinación lineal de las otras, su determinante es nulo.

Por otro lado sabemos que una matriz cuadrada es invertible si y solo si en la diagonal de la forma escalonada hay pivotes (Proposición 1.3.2). Según a), b) y c) las transformaciones elementales no cambian la anulación o no del determinante, por tanto se obtiene el criterio alternativo:

Corolario 3.1.4. Una matriz cuadrada es invertible si y solo si su determinante es distinto de cero.

Desde el punto de vista práctico la Proposición 3.1.2 implica que los determinantes se pueden calcular con eliminación de Gauss, esto es muchísimo más eficiente que la definición original en cuanto n crece un poco, y asegura que el resultado es

independiente de cómo la llevemos a cabo (este sería el punto delicado de justificar con el segundo enfoque).

Como ejemplo, consideremos

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 4 \\ -1 & 4 & 22 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Un posible cálculo de $|A|$ con las transformaciones elementales es:

$$|A| \underset{f_1 \mapsto f_1/2}{=} 2 \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -1 & 4 & 22 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} \underset{\substack{f_2 \mapsto f_2 + f_1 \\ f_3 \mapsto f_3 - f_1}}{=} 2 \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 7 & 24 \\ 0 & -1 & -3 \end{vmatrix} \underset{f_3 \mapsto f_3 + f_2/7}{=} 2 \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 7 & 24 \\ 0 & 0 & 3/7 \end{vmatrix} = 6.$$

Si hubiéramos comenzado intercambiando la primera y la tercera fila para tener un 1 como pivote, otra posibilidad sería:

$$|A| \underset{f_1 \leftrightarrow f_3}{=} - \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & 4 & 22 \\ 2 & 6 & 4 \end{vmatrix} \underset{\substack{f_2 \mapsto f_2 + f_1 \\ f_3 \mapsto f_3 - 2f_1}}{=} - \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 6 & 21 \\ 0 & 2 & 6 \end{vmatrix} \underset{f_3 \mapsto f_3 - f_2/3}{=} - \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 6 & 21 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 6.$$

Los resultados coinciden aunque las cuentas intermedias no se parezcan en absoluto.

Si hubiéramos empleado la definición las cuentas serían:

$$|A| = 2 \begin{vmatrix} 4 & 22 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} - (-1) \begin{vmatrix} 6 & 4 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 6 & 4 \\ 4 & 22 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-48) + 1 \cdot (-14) + 116 = 6.$$

El siguiente resultado recoge dos propiedades importantes bastante sorprendentes con nuestra definición. Al igual que los corolarios anteriores los deduciremos de la relación con la eliminación de Gauss pero esta vez de forma mucho menos inmediata.

Proposición 3.1.5. *Para $A, B \in \mathcal{M}_n(K)$ se cumple*

$$|A| = |A^t| \quad y \quad |AB| = |A||B|.$$

La propiedad $|A| \neq 0$ si y solo si $|A^t| \neq 0$ se sigue de resultados anteriores (véase el comienzo de la demostración) pero que los valores numéricos coincidan es algo inesperado. Más sorprendente todavía es la segunda propiedad, ya sea con nuestra definición de determinante o considerados como denominadores al resolver sistemas. Resulta que esos números que asignamos a cada matriz son invariantes por multiplicación sin que hayamos puesto nada de nuestra parte para que ocurra eso. La interpretación geométrica de la próxima sección proveerá alguna intuición al menos en los casos de dimensión baja.

Esta segunda propiedad asegura que por mucho que multipliquemos por sí misma una matriz de determinante 1 el determinante seguirá siendo 1, aunque los elementos se hagan gigantescos. Por ejemplo,

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 5 \\ 11 & 8 \end{pmatrix}, \quad B = A^2 = \begin{pmatrix} 104 & 75 \\ 165 & 119 \end{pmatrix}, \quad AB = A^3 = \begin{pmatrix} 1553 & 1120 \\ 2464 & 1777 \end{pmatrix}.$$

Como $|A| = 1$, sin hacer las cuentas $|B| = |AB| = 1$.

El resto de la sección está dedicado a las pruebas de los resultados. Si te aburre la teoría, no te aportarán gran cosa y harás bien en saltártelas. Si por el contrario te intriga la explicación de las inesperadas propiedades, lee con atención y envía al buzón de sugerencias de la universidad tu deseo de otro doble grado ingeniería-matemáticas.

Las definiciones recursivas se prestan muy bien a demostraciones por el método de *inducción*. En caso de que no lo hayas estudiado en otra asignatura posiblemente sea un poco injusto que lo aprendas con las breves indicaciones incluidas aquí. Algunas buenas referencias son [19, §8], [7, §1.1].

El método de inducción es una forma sofisticada del “y así sucesivamente” que se emplea en muchas demostraciones. Imagina por ejemplo que alguien te hablase de la fórmula

$$S_n = \frac{n(n+1)}{2} \quad \text{con} \quad S_n = 1 + 2 + \cdots + n$$

y te dijera que por alguna extraña razón solo supiera probarla para $n < 1000$. Tú podrías deducirla para $n = 1000$ con el siguiente argumento:

$$S_{1000} = S_{999} + 1000 = \frac{999(999+1)}{2} + 1000 = \left(\frac{999}{2} + 1\right)(999+1) = \frac{(1000+1)1000}{2}.$$

Si al día siguiente te dijera que ahora tiene una prueba para $n < 2000$ tu podrías extenderla a $n = 2000$ empleando de la misma manera $S_{2000} = S_{1999} + 2000$. Si se pusiera pesado con otras afirmaciones del mismo cariz, después de unos cuantos forcejeos podrías sentenciar que en general cualquier prueba que encontrase para los menores que n se extiende a n ya que

$$S_n = S_{n-1} + n = \frac{(n-1)(n-1+1)}{2} + n = \left(\frac{n-1}{2} + 1\right)n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Si toda prueba se extiende un paso más allá es que el resultado es cierto siempre, pues es imposible que sea falso para un n siendo verdadero para los anteriores. El método de inducción para probar cierta propiedad \mathcal{P}_n dependiendo de $n \in \mathbb{Z}^+$ consiste en comprobarla para algunos casos iniciales, normalmente para $n = 1$, y después mostrar que si se cumpliera para los menores que n (a esto se le llama *hipótesis de inducción*) necesariamente se cumpliría para n .

Demostración del Lema 3.1.1. Supongamos que la fila considerada es la primera, $k = 1$, con otras el razonamiento es el mismo. Imitando la notación implícita en el enunciado escribimos $d_i(A)$, $d_i(B)$ y $d_i(C)$ para distinguir los d_i correspondientes a cada una de las tres matrices.

Aplicamos inducción en n . El resultado es trivial para $n = 1$, mientras que para $n > 1$, según la definición,

$$|C| = c_{11}d_1(C) + \sum_{i=2}^n (-1)^{i-1} c_{i1}d_i(C) = \lambda a_{11}d_1(A) + \mu b_{11}d_1(B) + \sum_{i=2}^n (-1)^{i-1} c_{i1}d_i(C)$$

porque $c_{11} = \lambda a_{11} + \mu b_{11}$ y $d_1(A) = d_1(B) = d_1(C)$ debido a que las filas distintas de la primera son iguales. Por la hipótesis de inducción, en el sumatorio $d_i(C) = \lambda d_i(A) + \mu d_i(B)$ y sustituyendo se deduce la fórmula esperada. \square

Demostración de la Proposición 3.1.2. Comencemos demostrando la parte final para A escalonada por inducción en n . Es una obviedad para $n = 1$. Si $n > 1$ sea $\tilde{A} \in \mathcal{M}_{n-1}(K)$ la matriz A sin la primera fila y columna, de este modo $d_1(A) = |\tilde{A}|$. Por la hipótesis de inducción $|\tilde{A}| = a_{22} \cdots a_{nn}$ y sustituyendo en $|A| = a_{11}|\tilde{A}|$ se obtiene el resultado para n .

El apartado b) se sigue inmediatamente del Lema 3.1.1 con $\mu = 0$. Por otro lado, suponiendo c) una matriz con dos filas iguales tiene determinante nulo, tomándola como B en el Lema 3.1.1 con $\lambda = 1$ y $\mu = -1$, se deduce a). Solo resta probar c).

Para c) comenzamos el método de inducción en $n = 2$ para que haya al menos dos filas. En ese caso la fórmula $|A| = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$ asegura que c) es cierto. Consideramos ahora $n > 2$ y digamos que B es la matriz A con las filas en los lugares k y l intercambiadas. Por la hipótesis de inducción para $i \neq k, l$ se cumple $d_i(A) = -d_i(B)$ y $a_{i1} = b_{i1}$. Además $a_{k1} = b_{l1}$ y $a_{l1} = b_{k1}$. Entonces por la definición de determinante

$$-|A| = \sum_{i=1}^n (-1)^i a_{i1} d_i(A) = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k, l}}^n (-1)^{i-1} b_{i1} d_i(B) + (-1)^k b_{l1} d_k(A) + (-1)^l b_{k1} d_l(A).$$

La matriz A sin la k -ésima fila es lo mismo que la matriz B sin la l -ésima fila después de hacer $k - l - 1$ o $l - k - 1$ intercambios de fila, dependiendo de si $k > l$ o $l < k$. Con ello, empleando la hipótesis de inducción

$$(-1)^k b_{l1} d_k(A) + (-1)^l b_{k1} d_l(A) = (-1)^{k \pm (k-l)-1} b_{l1} d_l(B) + (-1)^{l \pm (l-k)-1} b_{k1} d_k(B).$$

Independientemente de la elección del signo \pm se cumple $(-1)^{k \pm (k-l)-1} = (-1)^{l-1}$ y lo mismo intercambiando k y l . Sustituyendo en la fórmula para $-|A|$ se obtiene a la derecha la definición de $|B|$ quedando completado el proceso de inducción. \square

Demostración de la Proposición 3.1.5. Antes de nada veamos que el caso $|A| = 0$ se sigue de resultados anteriores. En esta situación la matriz A no es invertible por el Corolario 3.1.4, entonces A^t tampoco lo es, por (1.4), y una nueva aplicación del Corolario 3.1.4 implica $|A^t| = 0$. Tampoco AB es invertible, quizá la manera más rápida de mostrarlo es apelando a (2.2) y a la Proposición 2.3.4 para obtener $\text{rg}(AB) \leq \text{rg}(A)$, entonces $|AB| = 0$.

Introduzcamos tres supuestos para una matriz E especial parecida a la identidad y calculemos su determinante y el de su traspuesta.

Si E es igual a la matriz identidad I salvo que para cierto k y cierto l distintos se cumple $e_{kl} = \lambda$, por la Proposición 3.1.2 a) se tiene $|E| = |I| = 1$ y también $|E^t| = 1$ porque E^t es del mismo tipo.

Si E es igual a I salvo que para cierto k se tiene $e_{kk} = \lambda \neq 0$, la parte final de la Proposición 3.1.2 asegura $|E| = |E^t| = \lambda$.

Si E es igual a la matriz identidad I salvo que para cierto k y cierto l distintos se cumple $e_{kk} = e_{ll} = 0$ y $e_{kl} = e_{lk} = 1$, la Proposición 3.1.2 c), intercambiando las filas k y l , asegura $|E| = |E^t| = -|I| = -1$.

En cualquiera de estos supuestos se dice que E es una *matriz elemental* porque calcular EB es lo mismo que aplicar a B una de las transformaciones elementales. Según los cálculos anteriores de $|E|$ y la Proposición 3.1.2 se cumple

$$(3.4) \quad |EB| = |E||B| \quad \text{para } E \text{ matriz elemental.}$$

Podemos recuperar cualquier $A \in \mathcal{M}_n(K)$ a partir de su forma escalonada reducida R aplicando transformaciones elementales, las inversas de las que aplicamos habitualmente, por consiguiente existen matrices elementales E_1, \dots, E_N tales que $A = E_1 E_2 \cdots E_N R$. Recordando $|A| \neq 0$, en nuestro caso se tiene $R = I$ por el Corolario 3.1.4 y la Proposición 1.3.2. De esta forma

$$A = E_1 E_2 \cdots E_N \quad \text{y} \quad A^t = E_N^t \cdots E_2^t E_1^t.$$

Sabemos que $|E_j| = |E_j^t|$ y entonces $|A| = |A^t|$ se sigue de (3.4). Por otro lado, para cualquier $B \in \mathcal{M}_n(K)$

$$|AB| = |E_1 E_2 \cdots E_N B| = |E_1||E_2| \cdots |E_N||B| = |A||B|$$

donde se ha aplicado repetidamente (3.4). □

Exprimiendo el silicio [opcional]. En `matlab/octave` el comando `det` halla el determinante. El siguiente programa utiliza este comando y una función definida por nosotros, `fdet`, que calcula el determinante con nuestra definición recursiva.

```

1 % Matriz
2 A = [2 6 4; -1 4 22; 1 2 -1];
3 % Determinante con comando directo
4 det(A)
5 % Utilizando la función recursiva fdet
6 fdet(A)

```

En `matlab/octave` las funciones definidas por el usuario deben estar en ficheros que tienen el mismo nombre que la propia función. En este caso `fdet.m`.

```

1 % La función se llama fdet igual que el fichero
2 % La salida será el valor de res
3 function res = fdet( A )
4     n = size(A,1);
5
6     % Si es 1x1 devuelve el único elemento
7     if n == 1
8         res = A(1,1);
9     else
10        % En otro caso usa la definición recursiva
11        res = 0;
12        for ii = 1:n
13            d_i = A;
14            % Hace desaparecer la primera columna
15            d_i(:,1) = [];
16            % Hace desaparecer la fila ii
17            d_i(ii,:) = [];
18            % Aquí está la recursión
19            d_i = fdet(d_i);

```

```

20                                     res = res + (-1)^(ii-1)*A(ii,1)*d_i;
21                                     end
22     end
23 end

```

La función se llama a sí misma en la línea 19 donde se llegará excepto en el caso de determinantes 1×1 tratado en la línea 8. Una función recursiva es la versión informática del método de inducción.

En `sagemath` los determinantes se calculan con `determinant`. Aprovechando las capacidades simbólicas, dado un N el siguiente código produce la fórmula completa para el determinante de matrices $N \times N$ genéricas. Con $N = 2$ y $N = 3$ se obtienen las fórmulas que hemos visto.

```

1 # Tamaño de la matriz
2 N = 3
3 # Lista de variables formando los elementos
4 L = [var('a_{}_{}') .format(ii, jj) for ii in range(1,N+1) for jj in
      ↪ range(1,N+1)]
5 # Matriz
6 A = matrix(N,N,L)
7 # Con expand se fuerza a que no deje paréntesis sin operar
8 print A.determinant().expand()

```

Si te quieres asustar escribe $N = 5$ en la línea 2. No es recomendable que pruebes con valores mayores que 8 porque pueden dejar tu ordenador colgado o hacer que consuma muchos recursos. Yo me he arrepentido con $N = 9$.

Si lees con cuidado una de las notas de la sección deducirás que la fórmula explícita para el determinante genérico en $\mathcal{M}_n(K)$ consta de $n! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n$ sumandos. Esta es una cantidad gigantesca en cuanto n crece mínimamente. Por ejemplo para el caso $n = 9$ (del que me arrepentí) resultan 362880 sumandos y para $n = 60$ ya excede el número estimado de átomos en todo el universo observable. Por otro lado ya habíamos mencionado que la eliminación de Gauss requiere aproximadamente $2n^3/3$ operaciones.

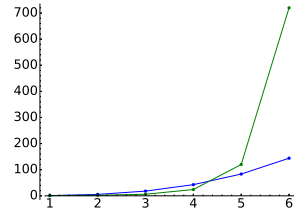
El código `sagemath`

```

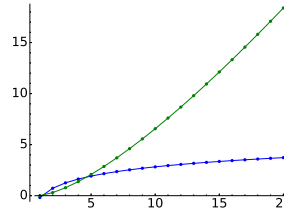
1 def two_graphs(L1,L2):
2     P = list_plot(L1, size=40) + list_plot(L2, size=40,
      ↪ color='green')
3     # une los puntos
4     P += list_plot(L1, plotjoined=True) + list_plot(L2,
      ↪ plotjoined=True, color='green')
5     P.fontsize(25)
6     return P
7
8 # Número de puntos
9 N = 6
10 # Datos de la primera gráfica
11 L1 = [(k,2/3*k^3) for k in srange(1,N+1)]
12 # Datos de la segunda gráfica
13 L2 = [(k,factorial(k)) for k in srange(1,N+1)]
14 show( two_graphs(L1,L2) )
15
16 # Escala logarítmica
17 # Número de puntos
18 N = 20
19 # Datos de la primera gráfica
20 L1 = [(k,log_b(2/3*k^3,10)) for k in srange(1,N+1)]
21 # Datos de la segunda gráfica
22 L2 = [(k,log_b(factorial(k),10)) for k in srange(1,N+1)]
23 show( two_graphs(L1,L2) )

```


genera las siguientes gráficas que muestran la diferencia abismal entre ambas cantidades.



$\frac{2}{3}n^3$ y $n!$ para $1 \leq n \leq 6$



$\log_{10}(\frac{2}{3}n^3)$ y $\log_{10}(n!)$ para $1 \leq n \leq 20$

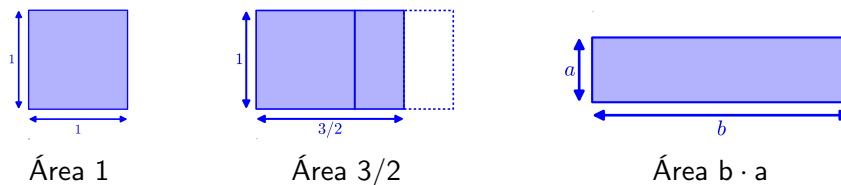
La segunda gráfica sería impensable sin usar escala logarítmica. Cada diferencia de una unidad en su eje vertical corresponde a multiplicar por 10.

3.2. Significado geométrico

Los determinantes, salvo el signo, son la fórmula para el área de los *paralelogramos* si $n = 2$, el volumen de los *paralelepípedos* si $n = 3$ y la generalización del volumen de *paralelotopos* en dimensiones mayores. Más de uno dirá, si era una cosa tan simple ¿por qué no hemos empezado por ahí? Porque definir el volumen no es algo tan sencillo, incluso en dimensiones bajas. Es mejor definir el determinante y llamar área, volumen o volumen generalizado a lo que sale.

Para hallar áreas, igual que para medir longitudes, necesitamos fijar unidades. Así decimos que en \mathbb{R}^2 el cuadrado $[0, 1] \times [0, 1]$ determinado por la base canónica $\vec{e}_1 = (1, 0)^t$, $\vec{e}_2 = (0, 1)^t$ tiene área 1. Más allá de las dificultades inherentes a una definición rigurosa, todos tenemos la idea de que si una figura se divide en trozos el área no varía bajo transformaciones que preservan ángulos y distancias, las cuales corresponden a que dos modelos recortados en papel de la figura original y de la transformada se puedan superponer exactamente. En la jerga se dice que son *congruentes*.

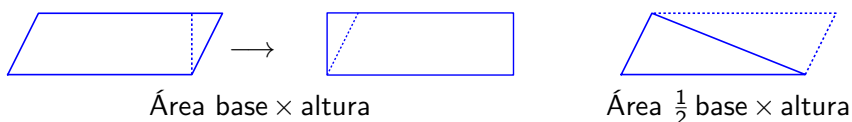
Por ejemplo, el rectángulo determinado por los vectores $(3/2, 0)^t$ y $(1, 0)^t$ tiene área $3/2$ porque duplicando el trozo $[1, 3/2] \times [0, 1]$ se obtiene $[1, 2] \times [0, 1]$ que es congruente a $[0, 1] \times [0, 1]$.



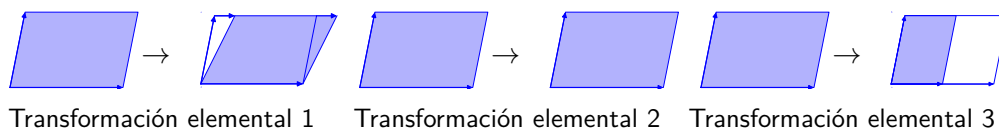
Pensándolo con un poco de cuidado el razonamiento se generaliza para concluir que el área de un rectángulo de lados racionales es *base* \times *altura*, lo cual es también cierto en el caso de lados reales porque estos son una suerte de ficción matemática³ para que las fórmulas con números racionales se extiendan por continuidad.

³Si quieres ver a un matemático famoso defendiendo a voz en grito en una conferencia para público general que los números reales no son “reales” sino ficticios, aquí tienes la oportunidad: <https://www.youtube.com/watch?v=gLTP62tW9Dc>.

Una vez que conocemos el área del rectángulo se sigue que la de cualquier *paralelogramo* (cuadrilátero de lados opuesto paralelos e iguales) también responde a la fórmula $\text{base} \times \text{altura}$ porque se puede recordar un pico y pegarlo en el lugar opuesto para obtener un rectángulo. Con dos triángulos congruentes formamos un paralelogramo, por tanto el área del triángulo es $\frac{1}{2}\text{base} \times \text{altura}$



Consideremos ahora los paralelogramos con un vértice en el origen en términos de los vectores que determinan los lados que parten de allí. Si a uno de ellos le añadimos un múltiplo del otro, que tomamos como base, el área no varía porque la altura no lo hace. Evidentemente, no ya el área sino el propio paralelogramo queda invariante si se intercambian los vectores. Finalmente, es obvio a partir de la fórmula que al multiplicar la base por $\lambda > 0$ el área se multiplica por λ .



Todo esto se traduce en que el área se comporta exactamente igual que el determinante bajo las transformaciones elementales salvo que no aparecen signos negativos al intercambiar vectores o multiplicar por un número negativo. La conclusión es que, si nos olvidamos del signo, el cálculo del determinante por reducción de Gauss-Jordan coincide con el cálculo usando las figuras anteriores hasta llegar al cuadrado unidad generado por \vec{e}_1 y \vec{e}_2 .

En resumidas cuentas, si \mathcal{P}_2 es el paralelogramo determinado por \vec{u} y \vec{v}

$$(3.5) \quad \text{Área}(\mathcal{P}_2) = |\det(\vec{u}|\vec{v})|, \quad \vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^2$$

donde las barras exteriores indican el *valor absoluto*, el resultado con signo positivo. Con el razonamiento anterior las coordenadas de \vec{u} y \vec{v} deberían escribirse en principio en fila, porque la eliminación de Gauss actúa sobre ellas, pero eso es indiferente por la Proposición 3.1.5.

Si antes de saber nada sobre vectores nos pidieran el área de un triángulo T con un vértice en el origen y los otros dos en los puntos $(3, 7)$ y $(5, 1)$ pasaríamos un mal rato tratando de usar el teorema de Pitágoras y trigonometría. Ahora que sabemos que un triángulo es la mitad de un paralelogramo y que se cumple (3.5), deducimos en un periquete

$$\text{Área}(T) = \frac{1}{2} \cdot 32 = 16 \quad \text{porque} \quad \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 7 & 1 \end{vmatrix} = -32.$$

El análogo en tres dimensiones del paralelogramo es el *paralelepípedo* (hexaedro con caras opuestas que son paralelogramos paralelos iguales). Con algo más de complicaciones geométricas llegaríamos a que su volumen, fijado el de $[0, 1] \times [0, 1] \times [0, 1]$

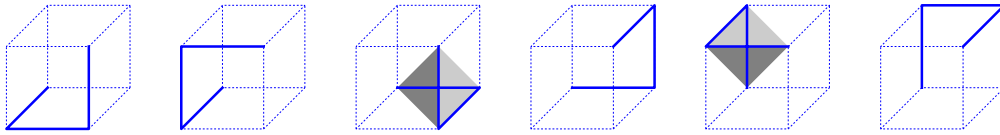
como unitario, es el área de la base por la altura y que si \mathcal{P}_3 es el paralelepípedo con un vértice en el origen y aristas concurrentes allí determinadas por los vectores \vec{u} , \vec{v} y \vec{w} , se tiene

$$(3.6) \quad \text{Volumen}(\mathcal{P}_3) = |\det(\vec{u}|\vec{v}|\vec{w})|, \quad \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^3.$$

El análogo del triángulo en tres dimensiones es el *tetraedro*, una pirámide de cuatro caras todas ellas triangulares. Su volumen, en términos de los vectores que dan las aristas que salen de un vértice considerado el origen, es un sexto del anterior:

$$(3.7) \quad \text{Volumen}(\mathcal{T}) = \frac{1}{6} |\det(\vec{u}|\vec{v}|\vec{w})|, \quad \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^3.$$

Para demostrarlo, a base de aplicar transformaciones elementales es suficiente mostrar que un cubo se descompone en seis tetraedros del mismo volumen⁴. Este es reto para nuestra visión en tres dimensiones. Si buscas la descomposición en la bibliografía o en internet notarás que no es tan fácil hacerse a la idea. Aquí va un intento un poco original. Se han marcado con mayor grosor tres aristas de cada una de los tetraedros. En el tercer y quinto casos se señalan también las caras visibles del tetraedro. ¿Te crees que los seis tetraedros son iguales salvo giros y simetrías y por tanto tienen el mismo volumen?



Esas tres aristas forman todos los caminos de un vértice al opuesto utilizando solo una vez cada una de las tres direcciones de los ejes.

Por ejemplo, el tetraedro regular de arista $a = 1$ en cierta posición tiene como vértices:

$$(0, 0, 0), \quad \left(-\frac{\sqrt{3}}{3}, 0, \frac{\sqrt{6}}{3}\right), \quad \left(\frac{\sqrt{3}}{6}, -\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{6}}{3}\right), \quad \left(\frac{\sqrt{3}}{6}, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{6}}{3}\right).$$

El volumen del tetraedro regular de arista a vendrá dado según (3.7) por

$$\pm a^3 \frac{1}{6} \begin{vmatrix} -\frac{1}{3}\sqrt{3} & \frac{1}{6}\sqrt{3} & \frac{1}{6}\sqrt{3} \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3}\sqrt{6} & \frac{1}{3}\sqrt{6} & \frac{1}{3}\sqrt{6} \end{vmatrix} = \frac{\sqrt{2}}{12} a^3$$

donde se ha elegido el signo de manera que el resultado sea positivo.

⁴Los problemas de cortar y reordenar parecen infantiles pero hay algunos bastante complicados. D. Hilbert incluyó en una influyente lista de problemas no resueltos en 1900 la pregunta de si dados dos poliedros del mismo volumen siempre era posible cortar en trozos el primero para obtener el segundo. En el caso de polígonos esto es cierto pero, de acuerdo con lo que conjeturaba de Hilbert, la respuesta es negativa para poliedros.

Consideremos una aplicación lineal $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ con $n = 2, 3$ dada por $\vec{x} \mapsto A\vec{x}$ (en la base canónica). Si $A = (\vec{u}|\vec{v})$ para $n = 2$ entonces f aplica el cuadrado unidad, determinado por \vec{e}_1 y \vec{e}_2 , en el paralelogramo determinado por \vec{u} y \vec{v} . Lo análogo se cumple para $n = 3$ con el paralelepípedo determinado por las columnas de la matriz. En estas situaciones, (3.5) y (3.6) nos dicen que el determinante de la matriz de un endomorfismo (siempre en la base canónica) es salvo el signo el factor por el que multiplica las áreas. Intuitivamente cualquier figura está compuesta por copias a escala infinitesimal del cuadrado o el cubo unidad, por tanto tal interpretación es independiente de la figura de partida. Con ello la segunda parte de la Proposición 3.1.5 se vuelve intuitiva.

Por ejemplo, consideremos

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \text{con} \quad A = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{de donde} \quad \begin{cases} x = (x' - y')/2, \\ y = (5y' - 3x')/2. \end{cases}$$

Sabemos que $x^2 + y^2 \leq 1$ tiene área π , por eso del πr^2 . Mediante la aplicación lineal $\vec{x} \mapsto A\vec{x}$ este círculo se transforma en $(x' - y')^2 + (5y' - 3x')^2 \leq 4$ que geoméricamente es un elipse torcida. Si en clase de análisis nos piden que hallemos su área lo mismo nos da un soponcio mientras que teniendo en cuenta que el determinante es el factor de deformación de las áreas el cálculo se reduce a $\pi |\det(A)| = 2\pi$.

Exprimiendo el silicio [opcional]. En dos dimensiones, una vez que uno sabe el área del triángulo tiene la posibilidad de hallar el área de cualquier polígono dividiéndolo en triángulos.

En tres dimensiones el análogo sería la división de un poliedro en tetraedros. El siguiente código `sagemath` lleva a cabo este proceso para hallar el volumen de cualquier pirámide partiendo de una lista `L` de vértices en el mismo plano, definidos en la línea 2, que determinan la base y un vértice “superior” `V`, definido en la línea 4, fuera de este plano.

```

1 # Lista de puntos en la base (en el mismo plano)
2 L = [(1,0,0), (1/2,sqrt(3)/2,0), (-1/2,sqrt(3)/2,0), (-1,0,0),
      ↪ (-1/2,-sqrt(3)/2,0), (1/2,-sqrt(3)/2,0)]
3 # Vértice superior
4 V = (0,0,1)
5
6 N = len(L)
7
8 # Lista vectores que parten de L[0] al resto de
9 # los vértices de la base
10 Lv = []
11 for k in range(1,N):
12     Lv.append( vector(L[k])-vector(L[0]) )
13
14 # Vector de L[0] a V
15 v = vector(L[0])-vector(V)
16
17 # Suma las áreas de los N-2 tetraedros
18 vol = 0
19 for k in range(N-2):
20     A = matrix(3,3,[Lv[k],Lv[k+1],v])
21     vol += 1/6*abs( A.determinant() )
22
23 print('Volumen_□=', vol)
24
```

```

25 # Dibuja las aristas de la pirámide
26 P = line3d(L+[L[0]], thickness=10)
27 for k in range(N):
28     P += line3d([L[k],V], thickness=10)
29 P.show()

```

Cada tetraedro está formado por uno de los triángulos en que se divide la base y el vértice v . El volumen de cada uno de ellos se calcula en la línea 21 y la 23 muestra la suma total de los volúmenes. A modo de extra, las líneas a partir de la 25 hacen un dibujo de las aristas, el “esqueleto”, de la pirámide.

3.3. Regla de Cramer, inversa y rango

La eliminación de Gauss permite que nosotros, o más a menudo los sirvientes de silicio bajo nuestro mando, calculen soluciones de sistemas de ecuaciones lineales con cierta eficiencia. Por ejemplo, nuestro ordenador la llevará a cabo sin ningún remilgo en doble precisión sobre un sistema 100×100 . La eliminación de Gauss también servía para calcular la matriz inversa y el rango.

Lo que vamos a ver ahora es que las soluciones de sistemas lineales, la inversa y el rango admiten fórmulas con determinantes. Si estos determinantes se hallan mediante eliminación de Gauss tal cosa no parece aportar demasiado a lo que sabíamos. En realidad es así desde el punto de vista práctico en cuanto nos salimos de dimensión baja, e incluso a menudo en ella. Aunque profesionales y aficionados de ayer y hoy sientan cierta satisfacción en que exista una fórmula para resolver sistemas lineales, cuando los denominadores son mucho más complicados que (3.3) tal fórmula es inútil numéricamente, lo importante es que haya un algoritmo eficiente. Hay que dejar claro el carácter eminentemente teórico de esta sección por mucho que en cursos anteriores uno haya hecho los cálculos de esta forma. El autor de [5] va todavía más lejos en [4] proponiendo que “el álgebra lineal puede hacerse mejor sin determinantes”.

La solución de sistemas de ecuaciones lineales compatibles determinados en términos de determinantes es la antigua *regla de Cramer* que todavía hoy tiene una fama y difusión quizá exagerada⁵ habida cuenta de su escasa utilidad práctica recién criticada.

Teorema 3.3.1 (*regla de Cramer*). Sea $A\vec{x} = \vec{b}$ con $A \in \mathcal{M}_n(K)$ un sistema compatible determinado y sea A_j la matriz A reemplazando la columna j -ésima por \vec{b} , entonces su solución es

$$x_j = \frac{|A_j|}{|A|}, \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

⁵Recuérdese que la libertad de cátedra es el extraño privilegio que permite que los profesores digan tonterías sin que puedan ser demandados. Teniendo en cuenta que el autor homónimo, G. Cramer, vivió en la primera mitad del siglo XVIII es difícil que tenga hoy un club de seguidores que se sientan ofendidos.

Por ejemplo, el caso $n = 2$ es

$$x_1 = \frac{1}{|A|} \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}, \quad x_2 = \frac{1}{|A|} \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}.$$

Sustituyendo $|A| = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ y calculando los otros dos determinantes se llega a (3.1).

Si uno piensa en lo que resultaría en el caso $n = 3$ evaluando los determinantes con (3.3) comprenderá por qué las “complicadas expresiones” mencionadas en (3.2) no se escribieron allí explícitamente.

Para la demostración del Teorema 3.3.1 utilizaremos un resultado que conviene destacar aunque solo consista en poner en claro lo que ya sabemos. La notación al uso consiste en llamar *adjunto* o *cofactor* de elemento a_{ij} de una matriz $A \in \mathcal{M}_n(K)$ a $A_{ij} = (-1)^{i+j}d_{ij}$ donde d_{ij} es el determinante de la matriz A cuando se elimina la fila i -ésima y la columna j -ésima. Por ejemplo:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 7 \end{pmatrix} \Rightarrow A_{11} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 7 \end{vmatrix} = 7, \quad A_{12} = -\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 7 \end{vmatrix} = -20, \quad A_{13} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Proposición 3.3.2. *Sea $A \in \mathcal{M}_n(K)$. Para cualquier $1 \leq k \leq n$ y $1 \leq l \leq n$*

$$|A| = \sum_{i=1}^n a_{ik}A_{ik} = \sum_{j=1}^n a_{lj}A_{lj}.$$

Demostración. La primera igualdad para $k = 1$ es nuestra definición de determinante y en el resto de los casos se sigue de la Proposición 3.1.2 c) intercambiando la primera fila por la k -ésima. La segunda igualdad es consecuencia de la primera teniendo en cuenta $|A| = |A^t|$ por la Proposición 3.1.5. \square

Sin apenas esfuerzo de aquí se deduce una formula para el cálculo de la matriz inversa con determinantes.

Teorema 3.3.3. *Sea $A \in \mathcal{M}_n(K)$ con $|A| \neq 0$. Su matriz inversa es la traspuesta de la matriz formada por los adjuntos dividida por $|A|$.*

Demostración. La matriz del enunciado es $(b_{ij})_{i,j=1}^n$ con $b_{ij} = A_{ji}/|A|$. Los elementos de $C = AB$ son $c_{ij} = \sum_k a_{ik}A_{jk}/|A|$. Si $i = j$ esto es 1 por la Proposición 3.3.2 y este mismo resultado asegura que $|A|c_{ij}$ para $i \neq j$ es el determinante de A cuando la fila i -ésima se sustituye por la j -ésima. Ahora bien, una matriz con dos filas iguales tiene determinante nulo y se deduce $C = I$. \square

La prueba de la regla de Cramer es muy similar.

Demostración del Teorema 3.3.1. La solución buscada es $\vec{x} = B\vec{b}$ con $B = A^{-1}$ cuyos elementos son, según lo anterior, $b_{ij} = A_{ji}/|A|$. Entonces la coordenada j -ésima de $B\vec{b}$ es $\sum_l b_{jl}b_l = |A|^{-1} \sum_l b_l A_{lj}$. Por la segunda igualdad de la Proposición 3.3.2 este último sumatorio es lo mismo que el determinante de la matriz A cambiando todos los elementos a_{lj} , que conforman la columna j -ésima, por b_l . \square

Si en el último ejemplo completamos el cálculo del resto de los adjuntos, $A_{13} = -1$, $A_{21} = -7$, $A_{22} = 13$, $A_{23} = 1$, $A_{32} = 1$, $A_{33} = -1$, se deduce del Teorema 3.3.3 con $|A| = -7$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 7 \end{pmatrix}^{-1} = -\frac{1}{7} \begin{pmatrix} 7 & -20 & -1 \\ -7 & 13 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}^t = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} -7 & 7 & 0 \\ 20 & -13 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Para detectar errores en tanta cuenta es conveniente multiplicar aunque sea parcialmente AA^{-1} y compararlo con la matriz identidad.

El cálculo de A^{-1} con el Teorema 3.3.3 requiere hallar n^2 determinantes de tamaño $n-1$ y uno de tamaño n , lo cual se vuelve bastante gravoso para hacer a mano en los casos típicos con $n = 4$.

El cálculo del rango con determinantes puede ser comparativamente menos eficiente todavía. La notación habitual es llamar en este cálculo *menor* de tamaño k de una matriz A al determinante de una submatriz cuadrada de A formada por los elementos que están simultáneamente en k filas y k columnas de nuestra elección. Por ejemplo, los números d_{ij} que aparecen en la definición de los adjuntos son menores de tamaño $k-1$. Con cierto abuso de notación se dice que un menor contiene a otro si viene de una submatriz que contiene a la del segundo.

Teorema 3.3.4. *Sea $A \in \mathcal{M}_n(K)$. Se cumple $\text{rg}(A) = k$ si y solo si existe un menor de tamaño k no nulo y todos los menores de dimensión mayor (si existieran) que lo contienen son nulos.*

Demostración. Si $\text{rg}(A) = k$ por definición hay k columnas pivote. Podemos suponer que son las k primeras porque reordenar las columnas no cambia el rango. Al usar reducción de Gauss-Jordan la segunda transformación elemental llevará k filas a las k primeras posiciones para obtener en la forma escalonada reducida $(e_{ij})_{i,j=1}^k = I_k$. Por la Proposición 3.1.2 el menor correspondiente a esas k filas y las k primeras columnas es no nulo (es un múltiplo no nulo de $|I_k| = 1$). Por otro lado, si un menor que lo contiene fuera también no nulo, habría una nueva columna pivote (recuérdese el Corolario 3.1.4) lo que contradice $\text{rg}(A) = k$.

Recíprocamente, si hay un menor no nulo de tamaño k , podemos suponer que es $|(a_{ij})_{i,j=1}^k|$ y las k primeras columnas son pivote por lo que $\text{rg}(A) \geq k$. Si todo menor de tamaño $k+1$ que lo contiene se anula, es imposible que haya otra columna pivote, por tanto $\text{rg}(A) < k+1$. \square

Por ejemplo, consideremos las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}.$$

En A el determinante de la submatriz formada por la segunda y cuarta columna y las dos filas es no nulo. Como no hay posibilidad de menores de tamaño mayor, $\text{rg}(A) = 2$. En B está claro que $\det((b_{ij})_{i,j=1}^2) = 1 \neq 0$ y $|B| = 0$ implica $\text{rg}(B) = 2$. Está claro a simple vista que $\text{rg}(C) = 1$ porque todas las columnas (o las filas) son proporcionales unas a otras. Para proceder con determinantes habría que considerar por ejemplo $c_{11} \neq 0$ y hallar todos los menores de tamaño 2 que lo contienen, cuatro en total, comprobando que se anulan.

Una vez que sabemos hallar el rango con determinantes y detectar las columnas pivote con ellos, podemos decidir la estructura del conjunto de soluciones de un sistema lineal por medio del Corolario 1.2.4 e incluso probarlo a través de determinantes⁶. Todavía más, los determinantes permiten detectar las columnas pivote y el Teorema 3.3.1 aplicado a las variables correspondiente tomando el resto como parámetros daría una versión (un poco fea de enunciar) de la regla de Cramer para sistemas compatibles indeterminados, es decir, una solución general basada en determinantes.

Exprimiendo el silicio [opcional]. Después de tanto insistir en la naturaleza teórica de la sección no merece la pena extenderse mucho con ejemplos numéricos. Solo veremos el siguiente código `matlab/octave` que genera un sistema aleatorio $N \times N$ y calcula la solución con un comando directo y con la regla de Cramer.

```

1  % Dimensión
2  N = 3;
3  % Matriz de coeficientes aleatoria
4  A = rand(N)
5  % Vector de coeficientes aleatorio
6  b = rand(N,1)
7
8  % Solución con comando directo
9  directo = A\b
10
11 % Solución con la regla de Cramer
12 x = zeros(N,1);
13 d = det(A);
14 for j = 1:N
15     Aj = A;
16     Aj(:,j) = b;
17     x(j) = det(Aj)/d;
18 end
19 cramer = x

```

Esto funciona sin mayores contratiempos para N del orden de unos cientos (para dimensiones tan grandes es aconsejable poner un punto y coma al menos al final de la línea 4), lo que parece contradecir consideraciones anteriores sobre la ineficiencia pero

⁶Para complicar más el lío de atribuciones del Corolario 1.2.4 llamado de Rouché-Frobenius en el mundo hispano y de Rouché-Capelli en el anglosajón, en [1] se sugiere que la primera prueba impresa, la cual se basaba en determinantes, podría deberse a C.L. Dodgson el escritor y matemático autor de “Alicia en el país de las maravillas” quien introdujo un algoritmo de cómputo de determinantes [2].

hay que tener en cuenta que tener en cuenta que `matlab/octave` no está calculando los determinantes con fórmulas como la de nuestra definición sino con alguna forma de eliminación de Gauss.