

Capítulo 3

Determinantes

3.1. Definición y propiedades

Los determinantes aparecieron a finales del siglo XVII, muchísimo antes de que se desarrollara el álgebra lineal¹. Con el lenguaje actual la motivación era saber qué debe cumplir una matriz cuadrada $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ para que el sistema $A\vec{x} = \vec{b}$ tenga solución única. Nosotros sabemos que la respuesta es $\text{rg}(A) = n$ o equivalentemente que A sea invertible (Corolario 1.2.4, Proposición 1.3.2). Esto estaba demasiado lejos de la teoría de aquellos tiempos remotos y querían, al igual que desean muchos alumnos hoy en día, una fórmula.

El caso $n = 1$ es trivial, $x_1 = b_1/a_{11}$ para $a_{11} \neq 0$. Si $a_{11} = 0$ la ecuación sería del tipo $0x_1 = b_1$ que no tiene solución ($b_1 \neq 0$) o tiene infinitas ($b_1 = 0$). En el caso $n = 2$, aprovechando las cuentas que hicimos para el cálculo de la matriz inversa, se obtiene

$$(3.1) \quad x_1 = \frac{b_1 a_{22} - b_2 a_{12}}{a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}} \quad \text{y} \quad x_2 = \frac{b_2 a_{11} - b_1 a_{21}}{a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}}$$

cuando $a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21} \neq 0$ y de nuevo se puede mostrar que si no se cumpliera esto el sistema dejaría de ser compatible determinado. Para $n = 3$ los cálculos son muy largos y llevan a complicadas expresiones del tipo

$$(3.2) \quad x_1 = \frac{\text{num.1}}{d}, \quad x_2 = \frac{\text{num.2}}{d} \quad \text{y} \quad x_3 = \frac{\text{num.3}}{d}$$

donde los numeradores num._j son funciones lineales en \vec{b} y en cada una de las columnas de A mientras que el denominador d tiene la apabullante fórmula:

$$(3.3) \quad a_{11} a_{22} a_{33} - a_{11} a_{23} a_{32} + a_{12} a_{23} a_{31} - a_{12} a_{21} a_{33} + a_{13} a_{21} a_{32} - a_{13} a_{22} a_{31}.$$

Una vez más resulta que la no anulación de este denominador es la condición necesaria y suficiente para que el sistema tenga solución única.

¹En https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/HistTopics/Matrices_and_determinants/ hay información sobre la historia de los determinantes, especialmente sobre quiénes participaron en su desarrollo.

Los determinantes surgieron históricamente como estos denominadores asociados a la resolución de sistemas de ecuaciones lineales. En su didáctica actual hay dos presentaciones principales, una más abstracta (por ejemplo en [6], [11] y en gran medida en [14]) que consiste en dar la expresión que generaliza (3.3) para el caso n y probar que tiene las propiedades que deseamos sobre los sistemas; la otra más intuitiva (por ejemplo en [9], [19] y [10]) introduce los determinantes a través de la resolución de sistemas por eliminación de Gauss y en algún momento llega a una fórmula abstracta para completar la teoría. La desventaja del primer enfoque es que la expresión surge de la nada y requiere ciertos complementos algebraicos, a cambio es más elegante. El mayor problema del segundo enfoque es que es menos directo y, aunque suene a broma, la existencia de los determinantes no resulta obvia (mira los títulos de [9, §4.I.4], [19, §3.4]).

Aquí comenzaremos, como en [15], un poco más cerca del primer enfoque pero conservando un nivel más básico que el habitual y pasando rápido a la relación con la eliminación de Gauss con la que probaremos algunas propiedades fundamentales.

Dada $A \in \mathcal{M}_n(K)$ definimos su *determinante*, denotado con $|A|$ o con $\det(A)$, como a_{11} si $n = 1$ y de manera recursiva para $n > 1$ como

$$|A| = \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} a_{i1} d_i$$

donde d_i es el determinante de la matriz que resulta al suprimir la primera columna y la i -ésima fila de A .

Por ejemplo, para $n = 2$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = (-1)^0 a_{11} \det(a_{11}) + (-1)^1 a_{21} \det(a_{12}) = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$$

que cuadra con lo obtenido al tratar los sistemas 2×2 . Respecto a la notación, para evitar sobrecargarla, tanto al escribir $|A|$ como $\det(A)$ se omiten los paréntesis de la matriz A escrita en términos de sus elementos.

Para $n = 3$ la definición nos dice

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = (-1)^0 a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + (-1)^1 a_{21} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + (-1)^2 a_{31} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}.$$

Si evaluamos estos tres determinantes con lo que sabemos del caso $n = 2$, obtendremos (3.3).

Posiblemente preferirías una definición explícita en vez de esta recursiva. Tal definición es conocida² aunque algo complicada y por ello la evitamos aquí mezclando

²Aquí va: $|A| = \sum_f (-1)^{v(f)} a_{1f(1)} a_{2f(2)} \cdots a_{nf(n)}$ donde la suma es sobre todas las funciones biyectivas $f : \{1, 2, \dots, n\} \rightarrow \{1, 2, \dots, n\}$, llamadas *permutaciones*, y $v(f)$ es el número de violaciones de desigualdades $f(a) < f(b)$ con $a < b$. Por ejemplo, para $n = 3$ si $f(1) = 1$, $f(2) = 3$, $f(3) = 2$ se tiene $v(f) = 1$ porque $f(2) \not< f(3)$ y si $f(1) = 3$, $f(2) = 2$, $f(3) = 1$ se tiene $v(f) = 3$.

los dos enfoques. Lo que subyace a estas complicaciones es que (3.3) tiene 6 sumandos, para $n = 5$ salen 120 y para $n = 70$ más de 10^{100} .

Para encontrar la conexión con las transformaciones elementales utilizaremos que los determinantes son lineales en cada fila por separado.

Lema 3.1.1. Sean $A, B, C \in \mathcal{M}_n(K)$ matrices iguales salvo que para una de sus filas f_k se cumple $f_k(C) = \lambda f_k(A) + \mu f_k(B)$ con $\lambda, \mu \in K$, entonces $|C| = \lambda|A| + \mu|B|$.

Un ejemplo muy sencillo para comprobar esta relación es

$$4(1, -1) - 5(1, 0) = (-1, -4) \quad \Rightarrow \quad 4 \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} - 5 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & -4 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}.$$

El resultado falla en general si hay más de una fila de C que es combinación lineal de las respectivas de A y B .

Del Lema 3.1.1 deduciremos el buen comportamiento con respecto a la eliminación de Gauss.

Proposición 3.1.2. Para cualquier matriz de $\mathcal{M}_n(K)$:

- a) Si se suma a una fila un múltiplo de otra, el determinante no varía.
- b) Si se multiplica una fila por una constante, el determinante se multiplica por dicha constante.
- c) Si se intercambian dos filas, el determinante cambia de signo.

Además si la matriz es escalonada su determinante es el producto de los elementos de la diagonal.

Por si no estuviera claro, la *diagonal* son los elementos a_{ii} . A veces se le llama diagonal principal para distinguirla de la otra diagonal geométrica que tiene poco interés.

De b) se deduce que una matriz con una fila de ceros tiene determinante nulo. Al combinarlo con a) se obtiene la siguiente generalización:

Corolario 3.1.3. Si una fila de una matriz cuadrada es combinación lineal de las otras, su determinante es nulo.

Por otro lado sabemos que una matriz cuadrada es invertible si y solo si en la diagonal de la forma escalonada hay pivotes (Proposición 1.3.2). Según a), b) y c) las transformaciones elementales no cambian la anulación o no del determinante, por tanto se obtiene el criterio alternativo:

Corolario 3.1.4. Una matriz cuadrada es invertible si y solo si su determinante es distinto de cero.

Desde el punto de vista práctico la Proposición 3.1.2 implica que los determinantes se pueden calcular con eliminación de Gauss, esto es muchísimo más eficiente que la definición original en cuanto n crece un poco, y asegura que el resultado es

independiente de cómo la llevemos a cabo (este sería el punto delicado de justificar con el segundo enfoque).

Como ejemplo, consideremos

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 4 \\ -1 & 4 & 22 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Un posible cálculo de $|A|$ con las transformaciones elementales es:

$$|A| \underset{f_1 \mapsto f_1/2}{=} 2 \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -1 & 4 & 22 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} \underset{\substack{f_2 \mapsto f_2 + f_1 \\ f_3 \mapsto f_3 - f_1}}{=} 2 \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 7 & 24 \\ 0 & -1 & -3 \end{vmatrix} \underset{f_3 \mapsto f_3 + f_2/7}{=} 2 \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 7 & 24 \\ 0 & 0 & 3/7 \end{vmatrix} = 6.$$

Si hubiéramos comenzado intercambiando la primera y la tercera fila para tener un 1 como pivote, otra posibilidad sería:

$$|A| \underset{f_1 \leftrightarrow f_3}{=} - \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & 4 & 22 \\ 2 & 6 & 4 \end{vmatrix} \underset{\substack{f_2 \mapsto f_2 + f_1 \\ f_3 \mapsto f_3 - 2f_1}}{=} - \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 6 & 21 \\ 0 & 2 & 6 \end{vmatrix} \underset{f_3 \mapsto f_3 - f_2/3}{=} - \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 6 & 21 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 6.$$

Los resultados coinciden aunque las cuentas intermedias no se parezcan en absoluto.

Si hubiéramos empleado la definición las cuentas serían:

$$|A| = 2 \begin{vmatrix} 4 & 22 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} - (-1) \begin{vmatrix} 6 & 4 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 6 & 4 \\ 4 & 22 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-48) + 1 \cdot (-14) + 116 = 6.$$

El siguiente resultado recoge dos propiedades importantes bastante sorprendentes con nuestra definición. Al igual que los corolarios anteriores los deduciremos de la relación con la eliminación de Gauss pero esta vez de forma mucho menos inmediata.

Proposición 3.1.5. *Para $A, B \in \mathcal{M}_n(K)$ se cumple*

$$|A| = |A^t| \quad y \quad |AB| = |A||B|.$$

La propiedad $|A| \neq 0$ si y solo si $|A^t| \neq 0$ se sigue de resultados anteriores (véase el comienzo de la demostración) pero que los valores numéricos coincidan es algo inesperado. Más sorprendente todavía es la segunda propiedad, ya sea con nuestra definición de determinante o considerados como denominadores al resolver sistemas. Resulta que esos números que asignamos a cada matriz son invariantes por multiplicación sin que hayamos puesto nada de nuestra parte para que ocurra eso. La interpretación geométrica de la próxima sección proveerá alguna intuición al menos en los casos de dimensión baja.

Esta segunda propiedad asegura que por mucho que multipliquemos por sí misma una matriz de determinante 1 el determinante seguirá siendo 1, aunque los elementos se hagan gigantesco. Por ejemplo,

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 5 \\ 11 & 8 \end{pmatrix}, \quad B = A^2 = \begin{pmatrix} 104 & 75 \\ 165 & 119 \end{pmatrix}, \quad AB = A^3 = \begin{pmatrix} 1553 & 1120 \\ 2464 & 1777 \end{pmatrix}.$$

Como $|A| = 1$, sin hacer las cuentas $|B| = |AB| = 1$.

El resto de la sección está dedicado a las pruebas de los resultados. Si te aburre la teoría, no te aportarán gran cosa y harás bien en saltártelas. Si por el contrario te intriga la explicación de las inesperadas propiedades, lee con atención y envía al buzón de sugerencias de la universidad tu deseo de otro doble grado ingeniería-matemáticas.

Las definiciones recursivas se prestan muy bien a demostraciones por el método de *inducción*. En caso de que no lo hayas estudiado en otra asignatura posiblemente sea un poco injusto que lo aprendas con las breves indicaciones incluidas aquí. Algunas buenas referencias son [16, §8], [4, §1.1].

El método de inducción es una forma sofisticada del “y así sucesivamente” que se emplea en muchas demostraciones. Imagina por ejemplo que alguien te hablase de la fórmula

$$S_n = \frac{n(n+1)}{2} \quad \text{con} \quad S_n = 1 + 2 + \cdots + n$$

y te dijera que por alguna extraña razón solo supiera probarla para $n < 1000$. Tú podrías deducirla para $n = 1000$ con el siguiente argumento:

$$S_{1000} = S_{999} + 1000 = \frac{999(999+1)}{2} + 1000 = \left(\frac{999}{2} + 1\right)(999+1) = \frac{(1000+1)1000}{2}.$$

Si al día siguiente te dijera que ahora tiene una prueba para $n < 2000$ tu podrías extenderla a $n = 2000$ empleando de la misma manera $S_{2000} = S_{1999} + 2000$. Si se pusiera pesado con otras afirmaciones del mismo cariz, después de unos cuantos forcejeos podrías sentenciar que en general cualquier prueba que encontrase para los menores que n se extiende a n ya que

$$S_n = S_{n-1} + n = \frac{(n-1)(n-1+1)}{2} + n = \left(\frac{n-1}{2} + 1\right)n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Si toda prueba se extiende un paso más allá es que el resultado es cierto siempre, pues es imposible que sea falso para un n siendo verdadero para los anteriores. El método de inducción para probar cierta propiedad \mathcal{P}_n dependiendo de $n \in \mathbb{Z}^+$ consiste en comprobarla para algunos casos iniciales, normalmente para $n = 1$, y después mostrar que si se cumpliera para los menores que n (a esto se le llama *hipótesis de inducción*) necesariamente se cumpliría para n .

Demostración del Lema 3.1.1. Supongamos que la fila considerada es la primera, $k = 1$, con otras el razonamiento es el mismo. Imitando la notación implícita en el enunciado escribimos $d_i(A)$, $d_i(B)$ y $d_i(C)$ para distinguir los d_i correspondientes a cada una de las tres matrices.

Aplicamos inducción en n . El resultado es trivial para $n = 1$, mientras que para $n > 1$, según la definición,

$$|C| = c_{11}d_1(C) + \sum_{i=2}^n (-1)^{i-1} c_{i1}d_i(C) = \lambda a_{11}d_1(A) + \mu b_{11}d_1(B) + \sum_{i=2}^n (-1)^{i-1} c_{i1}d_i(C)$$

porque $c_{11} = \lambda a_{11} + \mu b_{11}$ y $d_1(A) = d_1(B) = d_1(C)$ debido a que las filas distintas de la primera son iguales. Por la hipótesis de inducción, en el sumatorio $d_i(C) = \lambda d_i(A) + \mu d_i(B)$ y sustituyendo se deduce la fórmula esperada. \square

Demostración de la Proposición 3.1.2. Comencemos demostrando la parte final para A escalonada por inducción en n . Es una obviedad para $n = 1$. Si $n > 1$ sea $\tilde{A} \in \mathcal{M}_{n-1}(K)$ la matriz A sin la primera fila y columna, de este modo $d_1(A) = |\tilde{A}|$. Por la hipótesis de inducción $|\tilde{A}| = a_{22} \cdots a_{nn}$ y sustituyendo en $|A| = a_{11}|\tilde{A}|$ se obtiene el resultado para n .

El apartado b) se sigue inmediatamente del Lema 3.1.1 con $\mu = 0$. Por otro lado, suponiendo c) una matriz con dos filas iguales tiene determinante nulo, tomándola como B en el Lema 3.1.1 con $\lambda = 1$ y $\mu = -1$, se deduce a). Solo resta probar c).

Para c) comenzamos el método de inducción en $n = 2$ para que haya al menos dos filas. En ese caso la fórmula $|A| = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$ asegura que c) es cierto. Consideramos ahora $n > 2$ y digamos que B es la matriz A con las filas en los lugares k y l intercambiadas. Por la hipótesis de inducción para $i \neq k, l$ se cumple $d_i(A) = -d_i(B)$ y $a_{i1} = b_{i1}$. Además $a_{k1} = b_{l1}$ y $a_{l1} = b_{k1}$. Entonces por la definición de determinante

$$-|A| = \sum_{i=1}^n (-1)^i a_{i1} d_i(A) = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k, l}}^n (-1)^{i-1} b_{i1} d_i(B) + (-1)^k b_{l1} d_k(A) + (-1)^l b_{k1} d_l(A).$$

La matriz A sin la k -ésima fila es lo mismo que la matriz B sin la l -ésima fila después de hacer $k - l - 1$ o $l - k - 1$ intercambios de fila, dependiendo de si $k > l$ o $l < k$. Con ello, empleando la hipótesis de inducción

$$(-1)^k b_{l1} d_k(A) + (-1)^l b_{k1} d_l(A) = (-1)^{k \pm (k-l) - 1} b_{l1} d_l(B) + (-1)^{l \pm (l-k) - 1} b_{k1} d_k(B).$$

Independientemente de la elección del signo \pm se cumple $(-1)^{k \pm (k-l) - 1} = (-1)^{l-1}$ y lo mismo intercambiando k y l . Sustituyendo en la fórmula para $-|A|$ se obtiene a la derecha la definición de $|B|$ quedando completado el proceso de inducción. \square

Demostración de la Proposición 3.1.5. Antes de nada veamos que el caso $|A| = 0$ se sigue de resultados anteriores. En esta situación la matriz A no es invertible por el Corolario 3.1.4, entonces A^t tampoco lo es, por (1.4), y una nueva aplicación del Corolario 3.1.4 implica $|A^t| = 0$. Tampoco AB es invertible, quizá la manera más rápida de mostrarlo es apelando a (2.2) y a la Proposición 2.3.4 para obtener $\text{rg}(AB) \leq \text{rg}(A)$, entonces $|AB| = 0$.

Introduzcamos tres supuestos para una matriz E especial parecida a la identidad y calculemos su determinante y el de su traspuesta.

Si E es igual a la matriz identidad I salvo que para cierto k y cierto l distintos se cumple $e_{kl} = \lambda$, por la Proposición 3.1.2 a) se tiene $|E| = |I| = 1$ y también $|E^t| = 1$ porque E^t es del mismo tipo.

Si E es igual a I salvo que para cierto k se tiene $e_{kk} = \lambda \neq 0$, la parte final de la Proposición 3.1.2 asegura $|E| = |E^t| = \lambda$.

Si E es igual a la matriz identidad I salvo que para cierto k y cierto l distintos se cumple $e_{kk} = e_{ll} = 0$ y $e_{kl} = e_{lk} = 1$, la Proposición 3.1.2 c), intercambiando las filas k y l , asegura $|E| = |E^t| = -|I| = -1$.

En cualquiera de estos supuestos se dice que E es una *matriz elemental* porque calcular EB es lo mismo que aplicar a B una de las transformaciones elementales. Según los cálculos anteriores de $|E|$ y la Proposición 3.1.2 se cumple

$$(3.4) \quad |EB| = |E||B| \quad \text{para } E \text{ matriz elemental.}$$

Podemos recuperar cualquier $A \in \mathcal{M}_n(K)$ a partir de su forma escalonada reducida R aplicando transformaciones elementales, las inversas de las que aplicamos habitualmente, por consiguiente existen matrices elementales E_1, \dots, E_N tales que $A = E_1 E_2 \cdots E_N R$. Recordando $|A| \neq 0$, en nuestro caso se tiene $R = I$ por el Corolario 3.1.4 y la Proposición 1.3.2. De esta forma

$$A = E_1 E_2 \cdots E_N \quad \text{y} \quad A^t = E_N^t \cdots E_2^t E_1^t.$$

Sabemos que $|E_j| = |E_j^t|$ y entonces $|A| = |A^t|$ se sigue de (3.4). Por otro lado, para cualquier $B \in \mathcal{M}_n(K)$

$$|AB| = |E_1 E_2 \cdots E_N B| = |E_1||E_2| \cdots |E_N||B| = |A||B|$$

donde se ha aplicado repetidamente (3.4). □

Exprimiendo el silicio [opcional]. En `matlab/octave` el comando `det` halla el determinante. El siguiente programa utiliza este comando y una función definida por nosotros, `fdet`, que calcula el determinante con nuestra definición recursiva.

```

1 % Matriz
2 A = [2 6 4; -1 4 22; 1 2 -1];
3 % Determinante con comando directo
4 det(A)
5 % Utilizando la función recursiva fdet
6 fdet(A)

```

En `matlab/octave` las funciones definidas por el usuario deben estar en ficheros que tienen el mismo nombre que la propia función. En este caso `fdet.m`.

```

1 % La función se llama fdet igual que el fichero
2 % La salida será el valor de res
3 function res = fdet( A )
4     n = size(A,1);
5
6     % Si es 1x1 devuelve el único elemento
7     if n == 1
8         res = A(1,1);
9     else
10        % En otro caso usa la definición recursiva
11        res = 0;
12        for ii = 1:n
13            d_i = A;
14            % Hace desaparecer la primera columna
15            d_i(:,1) = [];
16            % Hace desaparecer la fila ii
17            d_i(ii,:) = [];
18            % Aquí está la recursión
19            d_i = fdet(d_i);

```

```

20                                     res = res + (-1)^(ii-1)*A(ii,1)*d_i;
21                                     end
22     end
23 end

```

La función se llama a sí misma en la línea 19 donde se llegará excepto en el caso de determinantes 1×1 tratado en la línea 8. Una función recursiva es la versión informática del método de inducción.

En `sagemath` los determinantes se calculan con `determinant`. Aprovechando las capacidades simbólicas, dado un N el siguiente código produce la fórmula completa para el determinante de matrices $N \times N$ genéricas. Con $N = 2$ y $N = 3$ se obtienen las fórmulas que hemos visto.

```

1 # Tamaño de la matriz
2 N = 3
3 # Lista de variables formando los elementos
4 L = [var('a_{}_{}') .format(ii, jj) for ii in range(1,N+1) for jj in
      ↪ range(1,N+1)]
5 # Matriz
6 A = matrix(N,N,L)
7 # Con expand se fuerza a que no deje paréntesis sin operar
8 print A.determinant().expand()

```

Si te quieres asustar escribe $N = 5$ en la línea 2. No es recomendable que pruebes con valores mayores que 8 porque pueden dejar tu ordenador colgado o hacer que consuma muchos recursos. Yo me he arrepentido con $N = 9$.

Si lees con cuidado una de las notas de la sección deducirás que la fórmula explícita para el determinante genérico en $\mathcal{M}_n(K)$ consta de $n! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n$ sumandos. Esta es una cantidad gigantesca en cuanto n crece mínimamente. Por ejemplo para el caso $n = 9$ (del que me arrepentí) resultan 362880 sumandos y para $n = 60$ ya excede el número estimado de átomos en todo el universo observable. Por otro lado ya habíamos mencionado que la eliminación de Gauss requiere aproximadamente $2n^3/3$ operaciones.

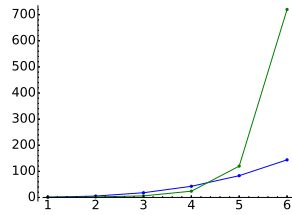
El código `sagemath`

```

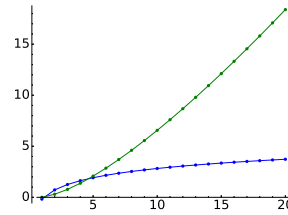
1 def two_graphs(L1,L2):
2     P = list_plot(L1, size=40) + list_plot(L2, size=40,
      ↪ color='green')
3     # une los puntos
4     P += list_plot(L1, plotjoined=True) + list_plot(L2,
      ↪ plotjoined=True, color='green')
5     P.fontsize(25)
6     return P
7
8 # Número de puntos
9 N = 6
10 # Datos de la primera gráfica
11 L1 = [(k,2/3*k^3) for k in srange(1,N+1)]
12 # Datos de la segunda gráfica
13 L2 = [(k, factorial(k)) for k in srange(1,N+1)]
14 show( two_graphs(L1,L2) )
15
16 # Escala logarítmica
17 # Número de puntos
18 N = 20
19 # Datos de la primera gráfica
20 L1 = [(k,log_b(2/3*k^3,10)) for k in srange(1,N+1)]
21 # Datos de la segunda gráfica
22 L2 = [(k,log_b(factorial(k),10)) for k in srange(1,N+1)]
23 show( two_graphs(L1,L2) )

```


genera las siguientes gráficas que muestran la diferencia abismal entre ambas cantidades.



$\frac{2}{3}n^3$ y $n!$ para $1 \leq n \leq 6$



$\log_{10}(\frac{2}{3}n^3)$ y $\log_{10}(n!)$ para $1 \leq n \leq 20$

La segunda gráfica sería impensable sin usar escala logarítmica. Cada diferencia de una unidad en su eje vertical corresponde a multiplicar por 10.