1) Es posible parametrizar los giros en $\mathbb{R}^3$ a través de exponenciales de matrices (lo cual está ligado a la relación entre matrices hermíticas y unitarias). Esto tiene interés en física en un contexto más amplio de grupos de transformaciones pero ya a este nivel da un manera de obtener la ecuación de un giro a partir de su ángulo y eje equivalente a la fórmula de Rodrigues.

I) A cada vector unitario $\vec{u} \in \mathbb{R}^3$ se le asocia una matriz antisimétrica Ω de *rotación infinitesimal* tal que $\Omega\vec{x} = \vec{u} \times \vec{x}$. Halla Ω en términos de las coordenadas de $\vec{u}$.

II) Prueba que $R = \exp(\alpha\Omega)$ es una matriz ortogonal para $\vec{u}$ como antes y $\alpha \in [0, 2\pi)$. Indicación: Recuerda que si H es hermítica, $\exp(iH)$ es unitaria. ¿Qué tipo de matriz es $-i\Omega$?

III) Muestra que $R\vec{u} = \vec{u}$ y que $\det(R) = e^{\alpha \operatorname{Tr}(\Omega)} = 1$ y concluye de ello que R es un giro de eje $t\vec{u}$.

IV) Calcula R para $\vec{u} = (1, 0, 0)^t$ y observa que el ángulo de giro es α.

*V) Demuestra que $R = I + \Omega \operatorname{sen}\alpha + (1 - \cos\alpha)\Omega^2$. Indicación: Deduce primero del teorema de Cayley-Hamilton que $\Omega^3 + \Omega$ es la matriz nula.

Comentarios: La matriz Ω da la derivada de $R = \exp(\alpha\Omega)$ en $\alpha = 0$ y en ese sentido es una rotación infinitesimal. Cuando α es muy pequeño, R está bien aproximada por $I + \alpha\Omega$. Por otro lado esta matriz que da el comportamiento infinitesimal tienen toda la información global sobre R. En física se hace uso extensivo de la teoría de grupos de Lie y álgebras de Lie que obtiene propiedades de grupos de transformaciones a partir de su aproximación lineal cerca de la identidad.

2) Los cuaterniones de Hamilton que aparecieron en un problema anterior dan lugar a otra manera de parametrizar giros que tiene interés incluso en el desarrollo de videojuegos 3D.

I) Cada vector $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$ lo identificamos con el cuaternión puro $x_1\mathbf{i} + x_2\mathbf{j} + x_3\mathbf{k}$. Comprueba que $-\mathbf{i}\vec{x}\mathbf{i}$ gira $\vec{x}$ y halla el ángulo y eje de giro.

II) Dados $\vec{u} \in \mathbb{R}^3$ unitario y $\alpha \in [0, 2\pi)$ les asociamos el cuaternión $q = \cos\frac{\alpha}{2} + \vec{u}\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}$. Calcula q^{-1}. Indicación: Se tiene $\vec{u}^2 = -1$ así que $\vec{u}$ es una variante de la unidad imaginaria.

III) Comprueba que $q\vec{u}q^{-1} = \vec{u}$.

*IV) Comprueba que $q\vec{x}q^{-1} = \vec{x}\cos\alpha + (\vec{u} \times \vec{x})\operatorname{sen}\alpha + (\vec{u} \cdot \vec{x})(1 - \cos\alpha)\vec{u}$ para $\vec{x}$ arbitrario, lo cual coincide la fórmula de Rodrigues y prueba que $\vec{x} \mapsto q\vec{x}q^{-1}$ es un giro de ángulo α y eje $t\vec{u}$. Indicación: Da sentido a $\vec{x}\vec{y} = -\vec{x} \cdot \vec{y} + \vec{x} \times \vec{y}$.

Comentarios: De cara a las aplicaciones a los gráficos con ordenador una de las buenas propiedades es que es fácil interpolar cuaterniones mientras que dada una matriz de giro de cierto ángulo y vector no está claro cómo deformarla sin grandes cálculos en otra correspondiente a otro ángulo y vector haciendo que las matrices intermedias sean también giros. Este problema aparece por ejemplo si queremos especificar una trayectoria de la cámara que pase por ciertos ángulos y ejes. Otra ventaja del empleo de cuaterniones es evitar un fenómeno de redundancia indeseado que se explica en el siguiente problema.

Las hojas opcionales tratan de mostrar la aplicación de la asignatura en diferentes temas de física. Son una propuesta de F. Chamizo. Si durante el curso 2018–2019 tienes alguna duda que no te resuelven en la clase de problemas, consulta con él. Los apartados con asterisco son más difíciles.

3) En mecánica lo más usual es indicar la orientación de un sólido rígido, o equivalentemente un giro en $\mathbb{R}^3$, por medio de los llamados *ángulos de Euler* que corresponden a rotaciones sucesivas por tres ejes. Un problema que tiene implicaciones prácticas es lo que se llama *gimbal lock*, consistente en que para algunas configuraciones de los parámetros se pierde un grado de libertad. Aquí lo veremos aunque no con la forma habitual de los ángulos de Euler.

i) Explica por qué se necesitan tres parámetros para especificar un giro. Indicación: Recuerda que un giro está determinado por un vector unitario que da su eje y un ángulo.

ii) Sean X_α, Y_β, Z_γ los giros de ángulos α, β y γ alrededor de los ejes OX, OY y OZ, respectivamente. Calcula $X_\alpha Y_0 Z_\gamma$ y muestra que su primera columna da cualquier vector unitario de $\mathbb{R}^3$. El hecho de que la dimensión de la superficie esférica unidad sea 2 concuerda con que variemos dos parámetros α y γ.

iii) Prueba que $X_\alpha Y_{\pi/2} Z_\gamma$ solo depende de $\alpha + \gamma$ (o de $\alpha - \gamma$ si no has tomado el sentido de giro con la regla del sacacorchos), es decir de un parámetro en vez de dos. Se dice que se ha producido *gimbal lock*.

Comentarios: Aparentemente la traducción de *gimbal* es *suspensión Cardan* y es una parte de los giróscopos que constan de tres anillos concéntricos correspondientes a ejes de rotación. La conservación del momento angular permite utilizar estos mecanismos para la orientación en la navegación aérea. Cuando dos de los anillos se alinean la información se vuelve redundante y el giróscopo pierde su utilidad.

4) Así como no vemos nada mecánicamente incongruente en las imágenes reflejadas en un espejo, en seguida notaríamos algo raro con fenómenos electromagnéticos. Por ejemplo, una simetría por un plano perpendicular a un conductor da un signo incorrecto en la ley de Ampère. Esto está relacionado con el comportamiento del producto vectorial.

i) Explica por qué dos productos vectoriales en $\mathbb{R}^3$ dan lo mismo, $\vec{u}_1 \times \vec{u}_2 = \vec{v}_1 \times \vec{v}_2$, si y solo si las matrices $M_1 = \big(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{x}\big)$ y $M_2 = \big(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{x}\big)$ tienen determinantes iguales cualquiera que sea $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$. Indicación: Estos determinantes son $(\vec{u}_1 \times \vec{u}_2) \cdot \vec{x}$ y $(\vec{v}_1 \times \vec{v}_2) \cdot \vec{x}$.

ii) Si A es una matriz ortogonal 3×3 prueba usando el apartado anterior que $(A\vec{v}) \times (A\vec{w}) = A(\vec{v} \times \vec{w})$ si tiene determinante 1 mientras que $(A\vec{v}) \times (A\vec{w}) = -A(\vec{v} \times \vec{w})$ si tiene determinante -1.

*iii) Si $\vec{F} : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ es un campo vectorial y $G = f \circ F$ con f un giro o una simetría en $\mathbb{R}^3$ fijando el origen. ¿Cuál es el rotacional de G en términos del rotacional de F? Indicación: Seguramente lo más rápido es utilizar el teorema de Stokes.

Comentarios: En física se habla de vectores polares y de vectores axiales. Esta distinción rara vez se hace en matemáticas. Los primeros son vectores que se comportan bien cuando aplicamos una aplicación lineal ortogonal en $\mathbb{R}^3$ mientras que lo segundos sufren un cambio de signo cuando tal aplicación tiene determinante -1 y por tanto involucra una simetría. A veces también se llama pseudovectores a los vectores axiales y el concepto se extiende a más dimensiones.

5) Todos aseguraríamos que las leyes físicas no pueden variar cuando sometemos a un objeto a una rotación de 360°. Una de las consecuencias más extrañas de la física cuántica relativista es que esto no es así para los fermiones. En principio uno tiene que girar 720° un electrón para que se quede "igual". Matemáticamente esto se deduce de que no existe una función "buena" no constante $\rho : \mathrm{SO}(3) \longrightarrow \mathrm{SU}(2)$ que respete productos, $\rho(AB) = \rho(A)\rho(B)$ donde $\mathrm{SO}(3)$ son las matrices ortogonales 3×3 y $\mathrm{SU}(2)$ las unitarias 2×2, ambas de determinante 1. Es decir, $\mathrm{SO}(3)$ corresponde a giros en el espacio.

I) Prueba que para cualquier giro g de π radianes (simetría axial) se tiene $\rho(g) = \pm I$ y por tanto ρ no puede ser inyectiva. Indicación: Piensa en la diagonalización de $\rho(g)$ y en que g^2 es la identidad.

II) Sean F y G respectivamente giros de ángulo $\pi/2$ alrededor de los ejes OX y OZ. Demuestra que $F^{-1}G^2F$ es un giro de ángulo π. ¿Cuál es su eje?

III) Demuestra que $R = GF^{-1}G^2F$ también es un giro de ángulo π y deduce de lo anterior que $\rho(G) = \pm I$.

*IV) Prueba que $\rho(g) = I$ para todo giro g de ángulo π (de hecho con un argumento más elaborado se podría probar que ρ es I para todo giro). Indicación: Explica por qué existe un h tal que $g = h^{-1}G^2h$.

Comentarios: De manera más precisa, lo que ocurre al girar un electrón 360° es que su función de onda Ψ cambia de signo. La densidad de probabilidad es $|\Psi|^2$ y por tanto no se ve afectada, sin embargo en principio podríamos notar algo distinto si hacemos que un electrón rotado interfiera con otro que no lo está. Esto sería como ver que las gráficas de $|1+e^{i\alpha x}|$ y $|1-e^{i\alpha x}|$ son distintas para cierto $\alpha > 0$. Un problema práctico es que α es comparable al inverso de la constante de Planck y en escalas macroscópicas ambas gráficas son prácticamente una banda. Otro más serio es que la carga del electrón tiene un efecto inmenso no deseado en cualquier intento de rotar el electrón con campos magnéticos. El experimento se ha llevado a cabo con neutrones que no están cargados y tienen el mismo tipo de espín que los electrones.