1) [4 puntos] Determina todos los $a, b \in \mathbb{R}$ tales que la siguiente matriz **no** sea diagonalizable sobre $\mathbb{C}$

$$\begin{pmatrix} a+b & b \\ 2-2a-b & 2-a-b \end{pmatrix}.$$

Ayuda: El polinomio característico es $\lambda^2 - 2\lambda + 2a - a^2$.

2) [5 puntos] Calcula $\exp(B)$ donde $B = tA$ con $t \in \mathbb{R}$ y $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. El resultado debe estar simplificado a una matriz real lo más sencilla posible.

Comentario/ayuda: En física cuántica a esto se le llama *operador de rotación*. Dependiendo de tus habilidades, quizá te sea más sencillo usar $A^2 = -I$ en la definición de exp en vez del método habitual.

3) [1 punto] Sea $Q : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}$ una forma cuadrática definida negativa con matriz (por supuesto simétrica) $A = (a_{ij})_{i,j=1}^4$. Demuestra que $a_{22}a_{44} > (a_{24})^2$.

Solución

---

1) Si los autovalores son distintos, necesariamente es diagonalizable sobre $\mathbb{C}$ por tanto basta estudiar el caso en el que el discriminante $\Delta = (-2)^2 - 4(2a - a^2)$ del polinomio característico es nulo. Como $\Delta = 4(1-a)^2$ se sigue $a = 1$. En este caso

$$\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda = 1 \quad \Rightarrow \quad A - \lambda I = \begin{pmatrix} b & b \\ -b & -b \end{pmatrix}.$$

Para que sea diagonalizable el núcleo debe tener dimensión 2 y por tanto $b = 0$. En definitiva, no es diagonalizable si y solo si $a = 1$ y $b \neq 0$.

2) Según la definición, separando pares e impares,

$$\exp(tA) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^{2n}t^{2n}}{(2n)!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^{2n+1}t^{2n+1}}{(2n+1)!} = I\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n t^{2n}}{(2n)!} + A\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n t^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

donde en la última igualdad se ha usado $A^{2n} = (-I)^n = I(-1)^n$. La primera suma es el desarrollo del coseno y la segunda la del seno, por tanto

$$\exp(tA) = I\cos t + A \operatorname{sen} t = \begin{pmatrix} \cos t & -\operatorname{sen} t \\ \operatorname{sen} t & \cos t \end{pmatrix}.$$

3) Sea $Q'((x,y)^t) = -Q((0,x,0,y)^t) = -a_{22}x^2 - 2a_{24}xy - a_{44}y^2$. Esta forma $Q' : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ es definida positiva y por el criterio de Sylvester (o pensando en los autovalores) $a_{22}a_{44} - (a_{24})^2$, que es el determinante de su matriz, es positivo.

Criterios de corrección y comentarios

1) El enunciado no pedía hallar los autovectores (incluso se podía evitar hallar los autovalores). Muchos los habéis calculado haciendo el problema más largo de lo que es. No está mal pero multiplica la posibilidad de equivocarse.

Hallar un autovalor λ y a continuación probar que $|A-\lambda I| \neq 0$ porque el rango es 2 no tiene sentido y es más que un error de cuentas que debería llamar la atención. He descontado por eso 1.5.

Los que tenéis el problema correcto salvo que os olvidáis de considerar al final qué ocurre con $b=0$ tenéis un 3.

Equivocarse al hallar los autovalores y después proceder de una manera incoherente con el error reduce la calificación típicamente a 0.75 o 1.

2) No existen la fórmulas $\exp(tM) = t\exp(M)$ o $\exp(tM) = e^t \exp(M)$ que empleáis algunos.

No simplificar el resultado final a una matriz real, como se pedía, descuenta 0.5. Alguno lo ha llevado al extremo hasta el punto de dejar también cosas sin operar y entonces he descontado más.

Por supuesto, se podía hacer también diagonalizando. Los autovalores de A son i y $-i$ con autovectores $(1,-i)^t$ y $(1,i)^t$ por tanto habría que calcular

$$\exp(B) = C\begin{pmatrix} e^{ti} & 0 \\ 0 & e^{-ti} \end{pmatrix} C^{-1} \qquad \text{con} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -i & i \end{pmatrix}$$

y operando (no escribo los detalles) se obtiene el resultado recordando $e^{\pm it} = \cos t \pm i \operatorname{sen} t$.

Nótese que con lo que sabemos del último tema, el nombre dado en física cuántica es adecuado porque corresponde a un giro en $\mathbb{R}^2$.

3) Otra prueba similar es que si cambiamos el nombre de las variables x_2 y x_4 a x_1 y x_2, respectivamente, la desigualdad a probar es $a_{11}a_{22} > (a_{12})^2$ pero $a_{11}a_{22} - (a_{12})^2 = \begin{vmatrix} -a_{11} & -a_{12} \\ -a_{12} & -a_{22} \end{vmatrix}$ que debe ser positivo por el criterio de Sylvester para el segundo menor angular.

Una tercera posibilidad un poco indirecta es decir que si φ es la forma bilineal simétrica asociada a Q entonces $-\varphi$ es un producto escalar. Como $-a_{ij} = -\varphi(\vec{e}_i, \vec{e}_j)$, la desigualdad $(-a_{22})(-a_{44}) > (-a_{24})^2$ equivale a Cauchy-Schwarz aplicado a los vectores $\vec{e}_2$ y $\vec{e}_4$.