Una métrica para el espacio de subvariedades de Galatius y Randal-Williams

Federico Cantero Morán
Universidad de Münster

Resumen

Galatius y Randal-Williams dotaron al conjunto de C^∞-subvariedades cerradas en $\mathbb{R}^m$ de una topología en [1]. Más tarde, Bökstedt y Madsen demostraron en [2] que una versión C^1 de esta topología es regular y cumple el segundo axioma de numerabilidad, por tanto es metrizable. En este póster damos una métrica explícita.

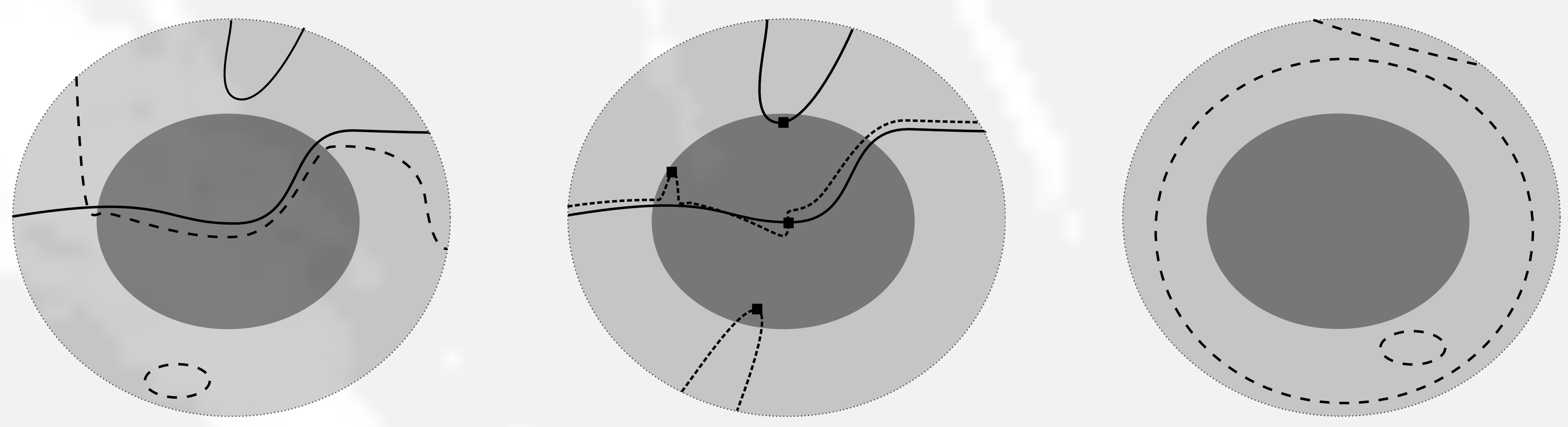
1. El espacio de subvariedades

El conjunto de todos los subconjuntos *cerrados* de $\mathbb{R}^m$ que son subvariedades diferenciales de dimensión d se denota por $\Psi_d(\mathbb{R}^m)$. El conjunto vacío siempre pertenece a $\Psi_d(\mathbb{R}^m)$.

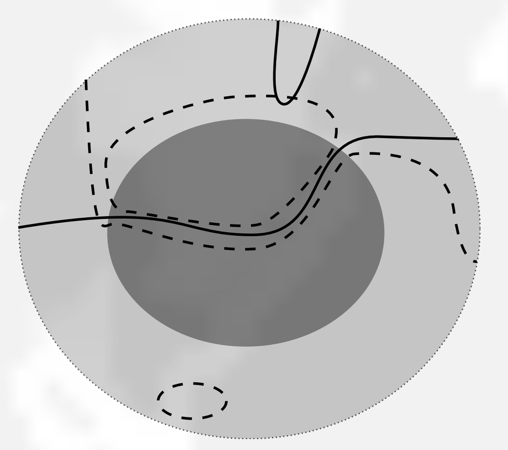
La topología en el conjunto $\Psi_d(\mathbb{R}^m)$ viene dada por la siguiente base de entornos de una subvariedad cerrada arbitraria W:

- Si $W \neq \emptyset$, cada compacto $K \subset \mathbb{R}^m$ y cada $\epsilon > 0$ definen un entorno básico (K, ϵ) de W; una subvariedad W' pertenece a (K, ϵ) si existe una sección f del fibrado normal $\mathrm{N}W \to W$ tal que $\exp_W(f(W)) \cap K = W' \cap K$ y $||f(x)|| + ||(Df - \mathrm{Id})(x)|| < \epsilon$ para todo $x \in W$ tal que $\exp_W \circ f(x) \in W' \cap K$.
- Si $W = \emptyset$, cada compacto $K \subset \mathbb{R}^m$ define un entorno básico (K) de $\emptyset$; y una subvariedad W' pertenece a (K) si $W' \cap K = \emptyset$.

$W' \in (K, \epsilon) \Leftrightarrow W' \cap K$ es la parte contenida en K de un desplazamiento de W a lo largo de un campo normal de W que está ϵ-cerca del campo nulo.



En los dibujos, el área coloreada de gris claro es $\mathbb{R}^m$, mientras que el área coloreada de gris oscuro es el compacto $K \subset \mathbb{R}^m$. La subvariedad pintada en trazo continuo es W y la pintada a trozos es W'.



En el primer dibujo, W' está cerca de W, mientras que en el segundo dibujo W' está lejos de W. Los cuadrados negros indican puntos que impiden que W' esté cerca de W. En el tercer dibujo la subvariedad W' está cerca de la subvariedad vacía. ¿Está W' cerca de W en el cuarto dibujo? ¿Es $\Psi_d(\mathbb{R}^m)$ conexo? ¿Es compacto?

2. Interés del espacio y metrizabilidad

El interés de este espacio estriba en el siguiente teorema, que es un paso crucial en una nueva demostración de Galatius y Randal-Williams del teorema de Madsen–Weiss.

TEOREMA ([1]). *La inclusión de la Grassmanniana afín $\gamma_{d,m}^{\perp}$ en $\Psi_d(\mathbb{R}^m)$ se extiende a un embedding de su compactificación por un punto*

$$\mathrm{Th}(\gamma_{d,m}^{\perp}) \hookrightarrow \Psi_d(\mathbb{R}^m)$$

y este embedding es una equivalencia homotópica débil.

Como paso intermedio en [2], Bökstedt y Madsen demostraron que

TEOREMA ([2]). *El espacio $\Psi_d(\mathbb{R}^m)$ es regular y satisface el segundo axioma de numerabilidad, por tanto es metrizable.*

3. La métrica

En este trabajo definimos una métrica explícita $\bar{d}_\psi$ para $\Psi_d(\mathbb{R}^m)$. La métrica $\bar{d}_\psi$ se obtiene como suma de una métrica $\bar{d}_H$ que se encarga de asegurar que W' esté cerca de W "localmente" (i.e., es localmente un desplazamiento ϵ-cercano de W a lo largo de un campo normal) y de una pseudo-métrica $\bar{\mathrm{v}}_H$ que se encarga de asegurar que W' esté cerca de W "globalmente" (i.e., es un desplazamiento global):

$$\bar{d}_\psi = \bar{d}_H + \bar{\mathrm{v}}_H.$$

TEOREMA ([3]). *La métrica $\bar{d}_\psi$ da la topología en $\Psi_d(\mathbb{R}^m)$.*

Si X es un espacio métrico, su compactificación $\overline{X}$ por un punto admite una métrica fácil de describir, y la distancia de Hausdorff es una distancia en el conjunto $\mathcal{P}_c(\bar{X})$ de subconjuntos cerrados de $\bar{X}$.

$\bar{d}_H$:

- Sea $\overline{\mathbb{S}(T\mathbb{R}^m)}$ la compactificación por un punto (que llamamos ∞) del fibrado de esferas del fibrado tangente $T\mathbb{R}^m$. Hay una aplicación inyectiva
$$\Psi_d(\mathbb{R}^m) \hookrightarrow \mathcal{P}_c(\overline{\mathbb{S}(T\mathbb{R}^m)})$$
que manda cada subvariedad W a $\mathbb{S}(TW) \cup \{\infty\}$.
- **Definimos $\bar{d}_H$ como la distancia que $\Psi_d(\mathbb{R}^m)$ hereda de su inclusión en $\mathcal{P}_c(\overline{\mathbb{S}(T\mathbb{R}^m)})$.**

$\bar{\mathrm{v}}_H$:

- Sea D_δ el disco de radio δ.
- Sea $v\colon \Psi_d(\mathbb{R}^m) \times [0, \infty) \to [0, \infty)$ la aplicación
$$v(W, \delta) = \mathrm{vol}(W \cap D_\delta).$$
- Sea $\omega\colon \Psi_d(\mathbb{R}^m) \to \mathcal{P}_c([0, \infty)^2)$ la aplicación que manda cada subvariedad al grafo "conexo" de la aplicación adjunta a v:
$$W \mapsto \{(\delta, y) \mid y \in [\mathrm{vol}(W \cap D_{\delta^-}), \mathrm{vol}(W \cap D_{\delta^+})]\}.$$

- Sea $\bar{\omega}\colon \Psi_d(\mathbb{R}^m) \to \mathcal{P}_c(\overline{[0, \infty)^2})$ la aplicación a las partes cerradas de la compactificación por un punto de $[0, \infty)^2$ que manda cada subvariedad W a $\omega(W) \cup \{\infty\}$.
- **Definimos $\bar{\mathrm{v}}_H(W, W')$ como la distancia de Hausdorff entre $\bar{\omega}(W)$ y $\bar{\omega}(W')$ en $\mathcal{P}_c(\overline{[0, \infty)^2})$.**

Referencias

[1] S. Galatius, O. Randal-Williams, *Monoids of moduli spaces of manifolds*, Geometry & Topology **14** (3) (2010), 1243–1302.

[2] M. Bökstedt, I. Madsen, *The cobordism category and Waldhausen's K-theory*, arXiv: 1102.4155.

[3] F. Cantero, *Homology Stability for Spaces of Surfaces*, Tesis (2013).