HOJA 4B: ENDOMORFISMOS DE LA ESFERA
SEMINARIO DE TOPOLOGÍA 2022-2023

Abstract. Los siguientes ejercicios son una continuación del ejercicio 4 de la hoja 4, y asumen los resultados de la sección 7.6.

Un endomorfismo continuo de la esfera $f\colon S^n \to S^n$ induce un homomorfismo $H_n(S^n) \to H_n(S^n)$. Llamamos *grado* de f al único k tal que $f_*([x]) = k \cdot [x]$, donde $[x]$ es uno de los dos generadores de $H_n(S^n)$.

(1) Demostrar que para cada entero $k \in \mathbb{Z}$ existe una aplicación continua $f\colon S^1 \to S^1$ de grado k. Deducir, usando la naturalidad de la sucesión exacta larga de Mayer-Vietoris para la suspensión, que existen aplicaciones continuas $f\colon S^n \to S^n$ de grado arbitrario.

(2) Halla un generador explícito de $H_n(S\partial\Delta^n)$usando el homomorfismo de conexión y el generador explícito de $H_{n-1}(\partial\Delta^n)$ visto en clase (el borde del símplice maximal de Δ^n).

(3) Usa este generador para demostrar que la aplicación $S\partial\Delta^n \to S\partial\Delta^n$ que refleja la última coordenada (es decir, intercambia los vértices de los dos conos de la suspensión y fija el resto de los vértices) induce multiplicación por -1 en el n-ésimo grupo de homología.

(4) Deducir que la aplicación antipodal $S^n \to S^n$ tiene grado $(-1)^{n+1}$ (la aplicación antipodal es composición de reflexiones). Concluir que si n es par, la aplicación antipodal no es homótopa a la identidad.

(5) Construir una homotopía entre la aplicación identidad y la aplicación antipodal en S^1.

(6) Leer la definición de la operación “join” en la página 9 del Hatcher y concluir:
   (a) Que si X es un espacio topológico, entonces $S^0 * X$ es homeomorfo a ΣX (la suspensión de X).
   (b) Que $S^0 * S^n \cong S^{n+1}$
   (c) Que $S^{2n-1} \cong S^1 * \overset{n}{\dots} * S^1$.

   Finalmente, construir una homotopía entre la aplicación identidad y la aplicación antipodal en S^{2n-1}.