Bol. Soc. Esp. Mat. Apl. n^o*0 (0000), 1–16*

Ondículas y tecnología

EUGENIO HERNÁNDEZ

Departamento de Matemáticas
Universidad Autónoma de Madrid

eugenio.hernandez@uam.es

Resumen

Las ondículas permiten descomponer una señal en sus diferentes componentes de frecuencias y estudiar cada uno de estos componentes con una resolución adecuada a su escala. Fueron desarrolladas por geólogos, ingenieros interesados en la visión por ordenador y el tratamiento de la imagen y por matemáticos. Este artículo contiene una descripción del concepto de **Análisis Multirresolución** (sección 2), básico para generar ondículas, y una explicación de los algoritmos de análisis y reconstrucción (sección 4), esenciales para la compresión de imágenes. La última sección esboza algunas de las numerosas aplicaciones de las ondículas e indica las referencias adecuadas para profundizar en ellas.

Palabras clave : *Análisis Multirresolución, Compresión de imágenes, Filtros, Ondículas, Sistemas reproductores.*

Clasificación por materias AMS : *42C40, 45T60*

1 Sistemas reproductores

Representar funciones mediante partículas elementales ha sido una de las herramientas principales que han usado los científicos para examinar y transmitir señales, ya sean auditivas, visuales o extraídas a partir de algún fenómeno natural.

El sistema de monomios $\{(x-a)^n : n = 0, 1, 2, \ldots\}$ son las partículas elementales que se usan para representar señales mediante el desarrollo de Taylor de una función. Los sistemas de ondas $\{1, \cos nx, \operatorname{sen} nx : n = 1, 2, 3, \ldots\}$ son las partículas elementales de las series de Fourier, que permiten representar señales definidas en cualquier intervalo de longitud 2π. Éstos son los dos modelos clásicos de sistemas reproductores. En general, cualquier base ortonormal para un espacio de funciones es un sistema reproductor de este espacio, en el que las partículas elementales son los elementos de la base.

Uno de los sistemas reproductores que más influencia ha tenido en el desarrollo de la tecnología digital en los últimos 50 años apareció en un resultado publicado por Claude E. Shannon en 1949 ([19]). Este resultado, conocido como **Teorema de muestreo de Shannon**, establece que toda función o señal f integrable sobre la recta real $\mathbb{R}$ y cuyo soporte de la transformada de Fourier esté contenido en un intervalo de la forma $[-B\pi, B\pi]$ puede escribirse como

$$f(t) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} f(\frac{k}{B}) \frac{\operatorname{sen} \pi(Bt-k)}{\pi(Bt-k)}, \tag{1}$$

donde la convergencia de las sumas parciales simétricas de la serie que aparece en (1) es en la norma de $L^2(\mathbb{R})$. C.E. Shannon es más conocido por sus ideas sobre la transmisión de la información y por ser el creador del concepto de entropía en la comunicación ([21]).

La definición de **transformada de Fourier** para una función $f \in L^1(\mathbb{R})$ es

$$\hat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{-i\xi t}\, dt\,. \tag{2}$$

La transformada de Fourier es un procedimiento matemático que descompone una señal en cada una de las frecuencias $\hat{f}(\xi)$ que la componen, de la misma manera que un prisma descompone la luz en colores. El teorema de muestreo de Shannon se aplica a señales cuyo rango de frecuencias está limitado a un intervalo finito, que es siempre el caso en las señales que aparecen en la práctica (por ejemplo, la frecuencia máxima trasmitida por una línea telefónica está alrededor de 4.000 ciclos por segundo).

Con conocimientos elementales de las propiedades de la transformada de Fourier, la demostración del Teorema de muestreo de Shannon es sencilla ([12], páginas 257 y 258). Es, sin embargo, la base de la tecnología digital, puesto que (1) muestra que si el rango de frecuencias de una señal f es inferior a $B\pi$, la señal puede representarse de manera exacta evaluando f en los puntos $\{\frac{k}{B} : k \in \mathbb{Z}\}$, es decir usando solamente una **muestra** discreta de todos los valores de la señal. En este caso la colección

$$\{\varphi_k(x) = \frac{\operatorname{sen} \pi(Bx-k)}{\pi(Bx-k)} : k \in \mathbb{Z}\} \tag{3}$$

es el sistema reproductor que permite representar la señal usando las muestras $f(\frac{k}{B})$. Este resultado es también básico en el concepto de **Análisis Multirresolución** que será expuesto en la sección 2.

Hay más sistemas reproductores. Uno de ellos, usado por ingenieros en el estudio y tratamiento de señales, intenta sacar partido del hecho de que a lo largo del tiempo la forma de la señal cambia. Esto sugiere que la recta del tiempo puede dividirse en varios intervalos y en cada uno de ellos se puede poner una base ortonormal. El ejemplo más sencillo es dividir la recta real en los intervalos $[n, n+1)$, $n \in \mathbb{Z}$, y poner en cada uno de ellos una base ortonormal de la forma $\{e^{2\pi i m t} : m \in \mathbb{Z}\}$. Así, la colección de funciones

$$\{\chi_{[n,n+1)}(t)\, e^{2\pi i m t} : n, m \in \mathbb{Z}\} \tag{4}$$

es una base ortonormal de $L^2(\mathbb{R})$ y permite reproducir cualquier función de este espacio. Este método se denomina **Análisis de Fourier con ventanas**. Sin embargo, cuando se utiliza el sistema (4) para analizar una señal aparecen discontinuidades como resultado de usar la función característica de los intervalos $[n, n+1)$.

Para superar esta dificultad, D. Gabor propuso en 1946 ([10]) considerar sistemas reproductores de la forma

$$\{g_{n,m}(t) = g(t-n)\, e^{2\pi i m t} : n, m \in \mathbb{Z}\} \tag{5}$$

donde g es una función de $L^2(\mathbb{R})$. Es un hecho conocido que una función g (no nula) y su transformada de Fourier $\hat{g}$ no pueden tener a la vez soporte compacto (véase, por ejemplo, el teorema 2.6 en [16]). A pesar de este resultado, sería deseable poder usar en (5) una función "localizada", es decir, con decaimiento fuerte, en el tiempo y en sus frecuencias, y por tanto suave en ambos dominios. Pero esto es imposible debido al **Teorema de Balian-Low** ([1]): si el sistema (5) es un sistema reproductor de $L^2(\mathbb{R})$ se ha de tener

$$\left(\int_{\mathbb{R}} |t\, g(t)|^2\, dt \right) \left(\int_{\mathbb{R}} |\xi\, \hat{g}(\xi)|^2\, d\xi \right) = \infty\,. \tag{6}$$

Por tanto, o bien la función g o su transformada de Fourier no pueden decaer más rápido que x^{-2}. Una demostración de este resultado puede verse en [12] (sección 8.2).

2 Ondículas y Análisis Multirresolución

Una forma de detectar las capas petrolíferas del interior de la tierra es enviar vibraciones o impulsos y analizar el eco recibido. En la práctica, este análisis debería ayudar a decidir dónde y de qué están compuestas las distintas capas del subsuelo. El análisis de Fourier con ventanas que desde 1960 se usaba para estudiar estos ecos no satisfacía al geofísico Jean Morlet, que trabajaba en la compañía de petróleo francesa Elf-Aquitaine. En los sistemas de Gabor (5) el tamaño de las ventanas, $g(t-n)$, es fijo y éstas se rellenan con oscilaciones, $e^{2\pi i m t}$, de todas las frecuencias. Como alternativa, J. Morlet propuso en 1975 considerar sistemas en los que la anchura de la ventana variara, manteniendo el número de oscilaciones constantes en cada ventana. De manera más precisa, propuso comenzar con una "onda pequeña" u "ondícula", $\psi \in L^2(\mathbb{R})$, y considerar el sistema de traslaciones y dilataciones

$$\{\psi_{j,k}(x) = 2^{j/2}\, \psi(2^j x - k) : j, k \in \mathbb{Z}\}, \tag{7}$$

de manera que la "onda pequeña" ψ se repite a todos los niveles 2^j con una amplitud adecuada al nivel.

J. Morlet pidió ayuda a Alex Grossmann en 1981 para dar sentido a los experimentos sobre la búsqueda de petróleo. Los esfuerzos de estos dos ingenieros llegaron a oídos del matemático francés Yves Meyer, quien, conocedor del Teorema de Balian-Low (6) para los sistemas de Gabor (5), pensó que un resultado similar debería cumplirse cuando el sistema (7) fuera una base ortonormal de $L^2(\mathbb{R})$. Por tanto sería imposible usar una ondícula suave y bien localizada para analizar las señales con el sistema (7). Sus intentos frustrados por demostrar que solamente en algunas ocasiones poco interesantes el sistema (7) podía ser una base ortonormal de $L^2(\mathbb{R})$ condujeron a P. G. Lemarié y a Y. Meyer a construir, en el verano de 1985, las "ondículas" que Y. Meyer creyó que no existían ([14]). A partir de este momento, el interés y desarrollo de la teoría de ondículas han crecido enormemente.

Las ondículas de Lemarié-Meyer tienen una expresión complicada y no se adaptan bien a los cálculos con ordenador. La posibilidad de usar las ondículas en la tecnología moderna partió de una idea de Stéphane Mallat, quien en 1986 trabajaba en su tesis doctoral sobre visión con ordenador en la Universidad de Pennsylvania en Philadelphia. Durante tres días, en el otoño de 1986, en la Universidad de Chicago, S. Mallat e Y. Meyer sentaron las bases de un modelo, llamado **Análisis Multirresolución (AMR)**, con el que, mediante un procedimiento específico, se pueden construir las ondículas que se han usado en numerosas aplicaciones ([15]). La descripción de este modelo así como el procedimiento para generar ondículas son necesarios para comprender más adelante las aplicaciones de las ondículas a la tecnología.

Un **Análisis Multirresolución (AMR)** es una colección de subespacios lineales cerrados, $\{V_j : j \in \mathbb{Z}\}$, de $L^2(\mathbb{R})$ que satisfacen

(i) $V_j \subset V_{j+1}$ para todo $j \in \mathbb{Z}$;

(ii) $f \in V_j$ si y sólo si $f(2(\cdot)) \in V_{j+1}$ para todo $j \in \mathbb{Z}$;

(iii) $\bigcap_{j\in\mathbb{Z}} V_j = \{0\}$;

(iv) $\overline{\bigcup_{j\in\mathbb{Z}} V_j} = L^2(\mathbb{R})$;

(v) Existe una función $\varphi \in V_0$, que recibe el nombre de **función de escala**, tal que $\{\varphi(\cdot - k) : k \in \mathbb{Z}\}$ es una base ortonormal de V_0.

¿Cómo se construye una ondícula a partir de un AMR? Para $j \in \mathbb{Z}$, sea $W_j = V_{j+1} \ominus V_j$ el complemento ortogonal de V_j en V_{j+1} con el producto escalar de $L^2(\mathbb{R})$, de tal manera que las propiedades (iii) y (iv) de AMR permiten escribir

$$L^2(\mathbb{R}) = \bigoplus_{j\in\mathbb{Z}} W_j \,. \tag{8}$$

De esta igualdad se deduce que, para construir una **ondícula**, es decir una función ψ de manera que el sistema (7) sea una base ortonormal de $L^2(\mathbb{R})$, basta encontrar ψ de manera que $\{\psi(x-k) : k \in \mathbb{Z}\}$ sea una base ortonormal de W_0, puesto que entonces la propiedad (ii) de AMR muestra que $\{2^{j/2}\psi(2^j x - k) : k \in \mathbb{Z}\}$ es una base ortonormal de W_j para todo $j \in \mathbb{Z}$.

Ahora es necesario hacer uso de la función de escala. Puesto que $\frac{1}{2}\varphi(\frac{x}{2}) \in V_{-1}$, debido a la propiedad (ii) de AMR, y $V_{-1} \subset V_0$, por la propiedad (i) de AMR, la propiedad (v) permite expresar $\frac{1}{2}\varphi(\frac{x}{2})$ en términos de $\{\varphi(\cdot + k) : k \in \mathbb{Z}\}$

para obtener

$$\frac{1}{2}\varphi(\frac{x}{2}) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \alpha_k \varphi(x+k)\,, \tag{9}$$

donde los $\alpha_k = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} \varphi(\frac{x}{2})\overline{\varphi(x+k)}\,dx$ son los coeficientes de la representación y $\sum_{k\in\mathbb{Z}} |\alpha_k|^2 < \infty$. Usando la definición de la transformada de Fourier se deduce inmediatamente

$$\hat{\varphi}(2\xi) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \alpha_k e^{ik\xi}\hat{\varphi}(\xi) = m_0(\xi)\hat{\varphi}(\xi)\,, \tag{10}$$

donde

$$m_0(\xi) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \alpha_k e^{ik\xi} \tag{11}$$

es una función 2π-periódica en $L^2([-\pi,\pi))$, que recibe el nombre de **filtro de paso bajo**.

Un argumento de periodización y el teorema de Plancherel para la transformada de Fourier muestran que $\{\varphi(\cdot - k) : k \in \mathbb{Z}\}$ es un sistema ortonormal en $L^2(\mathbb{R})$ si y sólo si

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} |\hat{\varphi}(\xi + 2k\pi)|^2 = 1 \qquad \text{para casi todo } \; \xi \in \mathbb{R}\,. \tag{12}$$

Esta igualdad, junto con (10) y la periodicidad de m_0, producen:

$$\begin{aligned} 1 &= \sum_{k\in\mathbb{Z}} |\hat{\varphi}(2\xi + 2k\pi)|^2 = \sum_{k\in\mathbb{Z}} |\hat{\varphi}(\xi + k\pi)|^2 |m_0(\xi + k\pi)|^2 \\ &= |m_0(\xi)|^2 \sum_{\ell\in\mathbb{Z}} |\hat{\varphi}(\xi + 2\ell\pi)|^2 + |m_0(\xi+\pi)|^2 \sum_{\ell\in\mathbb{Z}} |\hat{\varphi}(\xi + \pi + 2\ell\pi)|^2 \\ &= |m_0(\xi)|^2 \cdot 1 + |m_0(\xi+\pi)|^2 \cdot 1. \end{aligned}$$

Acabamos de probar una de las propiedades más importantes del filtro de paso bajo, a saber, la igualdad

$$|m_0(\xi)|^2 + |m_0(\xi+\pi)|^2 = 1 \qquad \text{para casi todo } \; \xi \in \mathbb{R}\,, \tag{13}$$

conocida con el nombre de **condición de Smith-Barnwell** ([20]).

La receta de Stéphane Mallat es sencilla: dado un AMR, la función ψ definida usando la transformada de Fourier mediante

$$\hat{\psi}(\xi) = e^{i\frac{\xi}{2}}\, \overline{m_0(\frac{\xi}{2} + \pi)}\, \hat{\varphi}(\frac{\xi}{2}) \tag{14}$$

es una ondícula. Esto se comprueba mostrando que $\{\psi(x-k) : k \in \mathbb{Z}\}$ es una base ortonormal de $W_0 = V_1 \ominus V_0$ (véase (8) y las líneas que le siguen).

Comenzamos mostrando que ψ es un elemento de V_1. Para ello basta encontrar coeficientes $\beta_k \in \ell^2(\mathbb{Z})$ de manera que

$$\psi(x) = 2\sum_{k\in\mathbb{Z}} \beta_k\, \varphi(2x - k)\,, \tag{15}$$

ya que $\{2\varphi(2x-k) : k \in \mathbb{Z}\}$ es un sistema de generadores de V_1. Aplicando la transformada de Fourier a ambos lados de la igualdad (15) se deduce

$$\hat{\psi}(\xi) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \beta_k \, e^{-ik\frac{\xi}{2}} \, \hat{\varphi}(\frac{\xi}{2})\,,$$

y usando (14) y (11) se obtiene

$$\begin{aligned}\hat{\psi}(\xi) &= e^{i\frac{\xi}{2}} \, \overline{m_0(\frac{\xi}{2}+\pi)} \, \hat{\varphi}(\frac{\xi}{2}) = e^{i\frac{\xi}{2}} \sum_{k\in\mathbb{Z}} \overline{\alpha_k} \, e^{-ik(\frac{\xi}{2}+\pi)} \, \hat{\varphi}(\frac{\xi}{2}) \\ &= \sum_{k\in\mathbb{Z}} \overline{\alpha_k} \, e^{-i\frac{\xi}{2}(k-1)} \, (-1)^k \, \hat{\varphi}(\frac{\xi}{2}) = \sum_{\ell\in\mathbb{Z}} \overline{\alpha_{\ell+1}} \, e^{-i\frac{\xi}{2}\ell} \, (-1)^{\ell+1} \, \hat{\varphi}(\frac{\xi}{2})\,.\end{aligned}$$

Comparando estas dos últimas igualdades se obtiene (15) con

$$\beta_k = (-1)^{k+1} \, \overline{\alpha_{k+1}}\,. \tag{16}$$

Para mostrar que ψ es ortogonal a V_0 en $L^2(\mathbb{R})$ basta probar que los productos escalares de ψ con todos los elementos de la colección $\{\varphi(\cdot - k) : k \in \mathbb{Z}\}$ son nulos. Como se apreciará en el siguiente razonamiento esto se debe a la receta (14), y más concretamente al factor $e^{i\frac{\xi}{2}}$ que en ella aparece. Utilizando el teorema de Plancherel para la transformada de Fourier se obtiene

$$2\pi \int_{\mathbb{R}} \psi(x) \, \overline{\varphi(x-k)} \, dx = \int_{\mathbb{R}} \hat{\psi}(\xi) \, e^{ik\xi} \, \overline{\hat{\varphi}(\xi)} \, d\xi = 2 \int_{\mathbb{R}} \hat{\psi}(2\xi) \, e^{2ik\xi} \, \overline{\hat{\varphi}(2\xi)} \, d\xi\,.$$

Sustituyendo $\hat{\psi}(2\xi)$ por la receta de S. Mallat y usando (10) la última integral que aparece en la fórmula anterior coincide con

$$\int_{\mathbb{R}} e^{i\xi} \, \overline{m_0(\xi+\pi)} \, \hat{\varphi}(\xi) e^{2ki\xi} \, \overline{m_0(\xi) \, \hat{\varphi}(\xi)} \, d\xi\,.$$

Dividiendo la recta real en los intervalos $[2k\pi, 2(k+1)\pi)$ y usando (12) se obtiene

$$2\pi \int_{\mathbb{R}} \psi(x) \, \overline{\varphi(x-k)} \, dx = 2 \int_0^{2\pi} e^{i\xi} \, \overline{m_0(\xi+\pi)} \, e^{2ki\xi} \, \overline{m_0(\xi)} \, d\xi\,.$$

El intervalo de integración $[0, 2\pi]$ se divide en los intervalos $[0,\pi]$ y $(\pi, 2\pi]$ y en este último se hace el cambio de variable $\xi \leftrightarrow \xi - \pi$ para obtener

$$2\pi \int_{\mathbb{R}} \psi(x) \, \overline{\varphi(x-k)} \, dx = 2 \int_0^{\pi} e^{i\xi} \, \overline{m_0(\xi+\pi)} \, \overline{m_0(\xi)} \, (1 + e^{-i\pi}) \, e^{2ki\xi} \, d\xi\,,$$

que es cero, debido a la fórmula de Euler $e^{-i\pi} = -1$.

La condición de Smith-Barnwell (13) es la que permite demostrar que $\{\psi(. - k); k \in \mathbb{Z}\}$ es un sistema ortonormal, o, equivalentemente, (12) para ψ en lugar de φ:

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} |\hat{\psi}(\xi + 2k\pi)|^2 = \sum_{k\in\mathbb{Z}} |\hat{\varphi}(\frac{1}{2}\xi + k\pi)|^2 |m_0(\frac{1}{2}\xi + k\pi + \pi)|^2$$

$$= \sum_{\ell\in\mathbb{Z}} |\hat{\varphi}(\frac{1}{2}\xi + 2\ell\pi)|^2 |m_0(\frac{1}{2}\xi + 2\ell\pi + \pi)|^2$$
$$+ \sum_{\ell\in\mathbb{Z}} |\hat{\varphi}(\frac{1}{2}\xi + 2\ell\pi + \pi)|^2 |m_0(\frac{1}{2}\xi + 2\ell\pi + 2\pi)|^2$$
$$= |m_0(\frac{1}{2}\xi + \pi)|^2 + |m_0(\frac{1}{2}\xi)|^2 = 1\,.$$

Queda demostrar que $\{\psi(.-k); k \in \mathbb{Z}\}$ genera todo W_0, lo que se deduce de la caracterización de este espacio que aparece en el lema 2.11 del capítulo 2 de [12].

3 Ejemplos de ondículas y filtros

Veamos cómo funciona esta teoría abstracta en un par de casos particulares. El primer caso producirá una base ortonormal de $L^2(\mathbb{R})$ ya diseñada en 1910 por Alfred Haar ([11]), y el segundo producirá una base ortonormal de $L^2(\mathbb{R})$ relacionada con el teorema de muestreo de Shannon expuesto en la sección primera.

Sea V_j el subespacio de $L^2(\mathbb{R})$ de las funciones constantes en intervalos de la forma $[2^{-j}k, 2^{-j}(k+1))$, $k \in \mathbb{Z}$, y considérese $\varphi(x) = \chi_{[-1,0)}$. No es difícil comprobar que la colección $\{V_j : j \in \mathbb{Z}\}$ junto con φ forman un Análisis Multirresolución (nótese que $\{\varphi(x-k) : k \in \mathbb{Z}\} = \{\chi_{[k,k+1)} : k \in \mathbb{Z}\}$ es una base ortonormal de V_0).

FIGURA 3.1*: La ondícula de Haar ψ y su función de escala φ.*

Puesto que
$$\frac{1}{2}\varphi(\frac{x}{2}) = \frac{1}{2}\chi_{[-2,0)}(x) = \frac{1}{2}\varphi(x) + \frac{1}{2}\varphi(x+1)\,,$$
de (9) y (11) se deduce que $\alpha_0 = 1/2$, $\alpha_1 = 1/2$ y $\alpha_k = 0$ para todo k distinto de 0 y 1, es decir,
$$m_0(\xi) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}e^{i\xi} = \frac{1}{2}(1 + e^{i\xi})\,, \tag{17}$$
y de (15) y (16),
$$\psi(x) = \varphi(2x+1) - \varphi(2x) = \chi_{[-1,-\frac{1}{2})}(x) - \chi_{[-\frac{1}{2},0)}(x)\,, \tag{18}$$
que es, salvo por una traslación, la función que utilizó A. Haar para obtener una base ortonormal de $L^2([0,1])$. (Si se toma $e^{-i\frac{\xi}{2}}$ en la receta de S. Mallat (14) en lugar de $e^{i\frac{\xi}{2}}$ se obtiene exactamente la función que usó A. Haar.)

Considérese ahora la función
$$\varphi(x) = \frac{\operatorname{sen}\pi x}{\pi x}\,,$$

que es el caso particular de la fórmula (3) con $k = 0$ y $B = 1$ y que aparece en el teorema de muestreo de Shannon. Sea V_j el subespacio vectorial cerrado generado por $\{\varphi_{j,k}(x) = 2^{j/2}\varphi(2^j x - k) : k \in \mathbb{Z}\}$. Puesto que $\hat{\varphi} = \chi_{[-\pi,\pi]}$, lo que se obtiene calculando la transformada inversa de Fourier de $\chi_{[-\pi,\pi]}$, se sigue que $V_j = \{f \in L^2(\mathbb{R}) : \operatorname{supp} \hat{f} \subset [-2^j\pi, 2^j\pi]\}$. Se deduce de aquí que la colección $\{V_j : j \in \mathbb{Z}\}$ junto con φ forman un Análisis Multirresolución. La propiedad (v) del modelo de Análisis Multirresolución se deduce de (12) y de la fórmula $\hat{\varphi}(\xi) = \chi_{[-\pi,\pi]}$.

Para obtener el filtro asociado con este Análisis Multirresolución obsérvese que en este caso particular (10) se escribe $\chi_{[-\pi,\pi]}(2\xi) = m_0(\xi)\chi_{[-\pi,\pi]}(\xi)$, por lo que teniendo en cuenta que el filtro debe ser una función periódica de periodo 2π se ha de tener

$$m_0(\xi) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \chi_{[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})}(\xi + 2k\pi)\,. \tag{19}$$

Los coeficientes α_k del filtro que aparecen en (11) son fáciles de calcular con la fórmula $\alpha_k = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} m_0(\xi)\, e^{-ik\xi}\, d\xi$, de donde se obtiene

$$\alpha_0 = \frac{1}{2}, \qquad \alpha_{2k} = 0\,(k \neq 0), \qquad a_{2k+1} = \frac{(-1)^k}{(2k+1)\pi}\,. \tag{20}$$

En este caso el filtro de paso bajo m_0 tiene infinitos coeficientes no nulos. Usando (15) y (16) puede escribirse ψ como una serie, pero es más fácil aplicar la receta de S. Mallat (14) para obtener

$$\begin{aligned}
\hat{\psi}(\xi) &= e^{i\frac{\xi}{2}} \left(\sum_{k\in\mathbb{Z}} \chi_{[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})}(\frac{1}{2}\xi + 2k\pi + \pi)\right) \chi_{[-\pi,\pi)}(\frac{\xi}{2}) \\
&= e^{i\frac{\xi}{2}} \left(\sum_{k\in\mathbb{Z}} \chi_{[-3\pi-4k\pi,-\pi-4k\pi)}(\xi)\right) \chi_{[-2\pi,2\pi)}(\xi) \\
&= e^{i\frac{\xi}{2}} \chi_{[-2\pi,-\pi)\cup[\pi,2\pi)}(\xi)\,.
\end{aligned} \tag{21}$$

Como $\psi(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \hat{\psi}(\xi)\, e^{i\xi x}\, d\xi$ (transformada inversa de Fourier) un ejercicio de integración produce

$$\psi(x) = -2\,\frac{\operatorname{sen}(2\pi x) + \cos(\pi x)}{\pi(2x+1)} \tag{22}$$

que se llama **ondícula de Shannon**.

Figura 3.2*: La ondícula de Shannon.*

Las ondículas de Haar y de Shannon son, en cierto sentido, duales. Mientras que la expresión de la ondícula de Haar en la variable x es sencilla y su filtro tiene solamente dos coeficientes no nulos, la expresión de la ondícula de Shannon es sencilla en la variable de frecuencias ξ y su filtro tiene infinitos coeficientes no nulos. Por razones que se expondrán con nitidez en la próxima sección, los filtros que tienen un número finito de coeficientes no nulos (llamados **filtros de respuesta finita - FRF**) son preferidos, a efectos de cálculos con ordenadores y del análisis de señales, a los filtros con infinitos coeficientes no nulos (llamados **filtros de respuesta infinita - FRI**).

Así pues, es preferible trabajar con el filtro de Haar y su ondícula asociada que con el filtro y la ondícula de Shannon. Pero la ondícula de Haar tiene el inconveniente de que no es continua en la variable x, por lo que pueden aparecer efectos indeseados si se tienen que analizar señales suaves. Una posibilidad es considerar ondículas que sean funciones polinómicas a trozos (**splines**), pero éstas también producen ondículas con filtros de respuesta infinita.

La solución la obtuvo Ingrid Daubechies ([6]). Hemos mostrado la forma en que se obtiene una ondícula a partir de un Análisis Multirresolución. El filtro desempeñó un papel esencial. Es tan esencial que, por sí solo, suponiendo que satisface ciertas condiciones además de (13), sirve para obtener una ondícula. La clave está en iterar (10) para obtener, suponiendo que $\hat{\varphi}$ es continua en 0 y que $\hat{\varphi}(0) = 1$,

$$\hat{\varphi}(\xi) = \prod_{j=1}^{\infty} m_0(2^{-j}\xi)\,. \tag{23}$$

La fórmula (23) permite obtener una función de escala, pero para que ésta determine un Análisis Multirresolución se ha de imponer alguna condición más sobre m_0: que la función m_0 sea derivable con derivada continua, satisfaga $m_0(0) = 1$, (13) y que se tenga $m_0(\xi) \neq 0$ para todo $\xi \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ es suficiente para nuestros propósitos (véase [12], página 80).

Una verdadera obra de orfebrería, narrada en [6] (puede consultarse también [17], [7] o [12]), permitió a I. Daubechies encontrar filtros de respuesta finita, es decir, polinómios trigonométricos $m_0(\xi)$ que producían ondículas suaves. La suavidad de las ondículas aumenta a medida que aumenta el número de coeficientes no nulos del filtro. Las ondículas que se obtienen con estos filtros son de **soporte compacto**. Gráficos de algunas ondículas de Daubechies, así como los coeficientes de sus filtros, pueden verse en las páginas 195 a 199 de [7].

4 Algoritmos de análisis y reconstrucción

A continuación se describe una de las aplicaciones más importantes de las ondículas: la capacidad para comprimir una señal, ya sea auditiva o visual, y reconstruirla sin pérdida de nitidez aparente. Este proceso se realiza usando los coeficientes α_k del filtro de paso bajo que aparecen en (11).

Dado un Análisis Multirresolución, sea P_j la proyección ortogonal de $L^2(\mathbb{R})$ sobre el subespacio V_j. Para cada señal de energía finita f, es decir $f \in L^2(\mathbb{R})$, se tiene

$$P_j f(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \langle f, \varphi_{j,k}\rangle \varphi_{j,k}(x)\,,$$

ya que $\{\varphi_{j,k} : k \in \mathbb{Z}\}$ es una base ortonormal de V_j. Podemos pensar que la sucesión de coeficientes

$$\mathbf{c^j} = \{c_{j,k} = \langle f, \varphi_{j,k}\rangle : k \in \mathbb{Z}\}$$

puede interpretarse como la representación al nivel j de la señal f, que es suficientemente buena para que la vista o el oído no detecten diferencias cuando aumentamos el nivel de resolución. Conviene tener en cuenta que en muchas aplicaciones la señal se obtiene como una sucesión de muestras (finitas) que pueden considerarse la sucesión $\mathbf{c^j}$ de partida.

Como $V_{j-1} \oplus W_{j-1} = V_j$, la sucesión $\mathbf{c^j}$, que representa la señal a nivel j, puede descomponerse en una sucesión $\mathbf{c^{j-1}}$ que representa la señal en el nivel $j-1$ con menor nitidez, y que puede considerarse la **tendencia** de la señal, y otra $\mathbf{d^{j-1}}$ que representa los **detalles** que habría que añadir a $\mathbf{c^{j-1}}$ para obtener la representación a nivel j.

¿Cómo se calculan los coeficientes $c_{j-1,k}$ a partir de los $c_{j,k}$? En este cálculo solo interviene la fórmula (9) adaptada a la escala $j-1$:

$$\begin{aligned}\varphi_{j-1,k}(x) &= 2^{\frac{1}{2}(j-1)}\varphi(2^{j-1}x-k) = 2^{\frac{1}{2}(j+1)}\frac{1}{2}\,\varphi(\frac{1}{2}(2^jx-2k)) \\ &= 2^{\frac{1}{2}(j+1)}\sum_{n\in\mathbb{Z}}\alpha_n\varphi(2^jx-2k+n) = \sqrt{2}\sum_{n\in\mathbb{Z}}\alpha_n\varphi_{j,2k-n}(x)\,. \qquad (24)\end{aligned}$$

Por tanto,

$$c_{j-1,k} = \langle f, \varphi_{j-1,k}\rangle = \sqrt{2}\sum_{n\in\mathbb{Z}}\overline{\alpha_n}c_{j,2k-n}\,. \qquad (25)$$

Esta fórmula muestra que la tendencia $\mathbf{c^{j-1}}$ al nivel V_{j-1} se calcula haciendo la convolución de las sucesiones $\{\sqrt{2}\overline{\alpha_n}\}$ con $\mathbf{c^j}$ y reteniendo solamente la mitad de los elementos, concretamente los que hay en los lugares pares. Mediante este proceso, cada tendencia tiene una cantidad de datos que es la mitad de la cantidad que contiene la tendencia en la etapa anterior.

El cálculo de los detalles es similar al realizado para calcular la tendencia. Ahora hay que utilizar la fórmula (15) adaptada al nivel V_{j-1} para obtener:

$$\psi_{j-1,k}(x) = \sqrt{2}\sum_{n\in\mathbb{Z}}\beta_n\varphi_{j,2k-n}(x)\,. \qquad (26)$$

Recuérdese que los coeficientes β_n se obtienen de los coeficientes del filtro siguiendo la fórmula (16). Por tanto,

$$d_{j-1,k} = \langle f, \psi_{j-1,k}\rangle = \sqrt{2}\sum_{n\in\mathbb{Z}}\overline{\beta_n}c_{j,2k-n}\,. \qquad (27)$$

Los detalles se obtienen, de nuevo, mediante una convolución y una reducción a la mitad por lo que la cantidad de detalles que se consiguen en cada etapa es la mitad que la cantidad de coeficientes de la etapa anterior.

Las fórmulas (25) y (27) muestran cómo se obtiene la tendencia $\mathbf{c^{j-1}}$ y los detalles $\mathbf{d^{j-1}}$ de una sucesión $\mathbf{c^j}$. Este proceso puede repetirse con $\mathbf{c^{j-1}}$ y todas las tendencias que se vayan obteniendo. El algoritmo se representa gráficamente en la figura 4.1, en la que cada flecha representa una convolución y una reducción a la mitad según los algoritmos contenidos en las fórmulas (25) y (27).

FIGURA 4.1*: Algoritmo de descomposición para ondículas.*

La decisión de parar después de M pasos puede tomarse según las características de la señal o con un criterio fijado de antemano. Al finalizar el proceso se retiene la tendencia $\mathbf{c^{j-M}}$ y todos los detalles $\mathbf{d^{j-M}}, \ldots, \mathbf{d^{j-1}}$. Puesto que en cada paso la cantidad de elementos originales N no varía, sino que se reparten a partes iguales entre la tendencia y los detalles, la cantidad total de información una vez terminado el algoritmo es la misma que la original. Este cálculo no produce compresión, es decir reducción de la cantidad de información. La compresión aparece cuando algunos o muchos de los coeficientes que representan los detalles son nulos o inferiores a un cierto umbral fijado de antemano (el umbral auditivo a partir del cual el oído no distingue el sonido o el umbral visual a partir del cual el ojo no distingue los detalles).

FIGURA 4.2*: (a) Dibujo codificado. (b) Versión con menor nitidez y detalles.*

Para entender cómo esto puede ser posible considérese el siguiente ejemplo. Supóngase que se tiene un dibujo como el **(a)** de la figura 4.2, donde los colores han sido codificados en cada uno de los 16 cuadraditos (o "pixels") en que se ha dividido la imagen. La parte **(b)** de la figura muestra la imagen difuminada (obtenida quedándose en cada cuadrado con uno de los colores más abundantes) y los detalles. El dibujo original necesitaba 16 datos para describir los colores, mientras que en la tendencia y en los detalles son necesarios solamente 8 datos no nulos: se ha conseguido una compresión del 50%. El ejemplo ha sido deliberadamente simplificado para hacer una clara exposición; habría que haber tenido en cuenta que para describir completamente el dibujo original es necesario indicar también la posición de cada cuadradito.

El proceso de descomposición se puede invertir para reconstruir la señal. Supóngase que se tiene una versión difuminada $\mathbf{c^{j-1}}$ al nivel V_{j-1} y los detalles $\mathbf{d^{j-1}}$. Para conseguir $\mathbf{c^j}$ se usa $V_j = V_{j-1} \oplus W_{j-1}$ junto con (24) y (26) para obtener

$$\sum_{\ell\in\mathbb{Z}} c_{j,\ell}\varphi_{j,\ell}(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_{j-1,k}\varphi_{j-1,k}(x) + \sum_{k\in\mathbb{Z}} d_{j-1,k}\psi_{j-1,k}(x)$$

$$= \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_{j-1,k}\left(\sum_{n\in\mathbb{Z}} \sqrt{2}\,\alpha_n\varphi_{j,2k-n}(x)\right) + \sum_{k\in\mathbb{Z}} d_{j-1,k}\left(\sum_{n\in\mathbb{Z}} \sqrt{2}\,\beta_n\varphi_{j,2k-n}(x)\right)$$

$$= \sum_{\ell \in \mathbb{Z}} \left\{ \sum_{k \in \mathbb{Z}} [\sqrt{2}\, c_{j-1,k} \alpha_{2k-\ell} + \sqrt{2}\, d_{j-1,k} \beta_{2k-\ell}] \right\} \varphi_{j,\ell}(x). \tag{28}$$

Por tanto,

$$c_{j,\ell} = \sqrt{2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} [c_{j-1,k} \alpha_{2k-\ell} + d_{j-1,k} \beta_{2k-\ell}]\,, \tag{29}$$

que permite reconstruir la señal a la escala j a partir de la version difuminada a la escala $j-1$ y sus detalles. Este algoritmo se describe en la figura 4.3.

Figura 4.3*: Algoritmo de reconstrucción.*

Los algoritmos de análisis (25) y (27) y el algoritmo de reconstrucción (29) muestran claramente que los filtros con un número finito de coeficientes no nulos (filtros de respuesta finita) son más adecuados para realizar cálculos con ordenador. Ya se ha mostrado en la Sección 3 que el filtro de la ondícula de Haar es de respuesta finita y se ha mencionado que esto también es así con los filtros de Daubechies. Una dificultad adicional que aparece cuando se usan estos filtros es que los coeficientes α_k son números irracionales, por lo que deben ser redondeados al realizar cálculos con el ordenador. Este redondeo, llamado **cuantización**, debe hacerse con cuidado y es una parte muy importante en el desarrollo de los algoritmos descritos.

Una ventaja adicional del algoritmo de reconstrucción con filtros es su complejidad, entendiendo por ésta el número de operaciones que hay que realizar con los N datos disponibles para reconstruir la señal. Si solamente K coeficientes del filtro son no nulos, la complejidad del algoritmo es del orden de KN. Esto es una mejora importante respecto a la complejidad de la Transformada de Fourier discreta, que es del orden de N^2, y a la de la Transformada Rápida de Fourier, que es del orden de $N \ln N$.

Hemos indicado en las sección 2 cómo se construyen ondículas en la recta real a partir de un Análisis Multirresolución. Para construir ondículas en $\mathbb{R}^2$ puede usarse la técnica del producto tensorial. Si ψ es una ondícula en $\mathbb{R}$ obtenida a partir de un Análisis Multirresolución con función de escala φ, la colección

$$\{\varphi_{j,k}\psi_{j,l},\ \psi_{j,k}\varphi_{j,l},\ \psi_{j,k}\psi_{j,l} : j,k,l \in \mathbb{Z}\}$$

es una base ortonormal de $L^2(\mathbb{R}^2)$ (véase la sección 7.7 de [16]). Con un proceso similar se obtienen bases ortonormales de ondículas de $L^2(\mathbb{R}^n), n > 2$. Para construir ondículas en un intervalo, por ejemplo $[0,1]$, se pueden "periodizar" las ondículas definidas sobre $\mathbb{R}$, tal como se explica en la sección 4.5 de [12]. Pero resulta más apropiado para las aplicaciones construir ondículas "frontera", como se describe en la sección 7.5.3 de [16]. Un problema aún por resolver es construir ondículas adaptadas a dominios generales de $\mathbb{R}^n$, lo que permitiría su aplicación a problemas de ecuaciones en derivadas parciales.

5 Ondículas en el desarrollo tecnológico y en la industria

Durante más de 200 años el Análisis de Fourier y sus variantes, como la transformada de Fourier con ventanas y la transformada rápida de Fourier, han sido una poderosa herramienta en muchos campos de la ciencia y de la industria. La llegada de las ondículas, el Análisis Multirresolución y los filtros han permitido disponer de una nueva herramienta con la que trabajar tanto en campos ya explorados por las técnicas de Fourier como en otros nuevos. La teoría moderna de ondículas nació hace apenas 20 años, pero el número de publicaciones que han aparecido sobre sus aplicaciones es ya enorme e imposible de abarcar en esta reducida exposición. Además de las pinceladas que expondremos en los párrafos siguientes, el lector interesado debería consultar la bibliografía que se cita.

La compresión de imágenes, basada en algoritmos similares a los presentados en la sección 4, extendidos al contexto bidimensional, es el campo en el que se han llevado a cabo la mayor parte de las aplicaciones de las ondículas a la tecnología actual. La necesidad, impuesta por el mercado, de disponer de cámaras fotográficas digitales de gran capacidad de almacenamiento y reducido tamaño, así como el deseo de almacenar digitalmente imágenes en movimiento, para su reproducción en aparatos DVD, ha desembocado inevitablemente en la necesidad de disponer de algoritmos de compresión que permitan reconstruir la imagen o el vídeo sin pérdida de nitidez aparente.

Como se pone de manifiesto en [4], el almacenamiento de una huella dactilar con una escala de grises de 8 tonos y con una resolución de 500 puntos por pulgada ocupa 10 Megabytes. El archivo de todas las huellas digitales de un país con 40 millones de habitantes requeriría un espacio de 400.000 Gigabytes. Estos números, amplificados, llevaron al Federal Bureau of Investigation (FBI) de EEUU a considerar métodos de compresión que hicieran manejable la cantidad de información acumulada y la que diariamente se recibe. El artículo citado al comienzo de este párrafo describe los métodos considerados, de entre los que se escogió un método con ondículas **biortogonales**, que en lugar de ser generadas por traslaciones y dilataciones de una sola función ψ, lo son por dos ψ y $\tilde{\psi}$, una de las cuales se usa para analizar y la otra para reconstruir. Los métodos recomendados para el almacenamiento de imágenes en JPEG2000 (JPEG: Joint Picture Expert Group) utilizan las ondículas y sus derivados.

Como ya se ha indicado en la sección 4, la posibilidad de comprimir con ondículas proviene del hecho de separar los detalles de la tendencia, para así poder eliminar los detalles intrascendentes. El umbral de corte para eliminar los detalles puede ser fijo o adaptado a cada una de las escalas, como se propone en [8]. Esta técnica puede combinarse con el algoritmo de la Mejor Base desarrollado por R.R. Coifman y M.V. Wickerhauser en la Universidad de Yale ([5]). El filtro que se utiliza depende de los datos que se deseen analizar y se elige de manera que minimice un determinado funcional, similar al que mide la entropía de un sistema. Con estas herramientas ha sido posible eliminar el ruido de una grabación de la Danza Húngara número 1 de Brahms, que era una copia en cinta de la grabación original realizada por el compositor en 1889 sobre un cilindro de cera (véase [3]).

La industria del cine y del entretenimiento es una de las más ávidas consumidoras de tecnología moderna. La necesidad de comprimir sus archivos se pone de manifiesto si se tiene en cuenta que el almacenamiento de una sola imagen requiere 12 Megabytes y que para que el movimiento sea aceptable se requiere pasar 24 imágenes por segundo por delante de los ojos del espectador. Se necesita aproximadamente 3 Gigabytes para almacenar una película de 10 segundos, por lo que 1800 Gigabytes es el espacio necesario para guardar una película de 100 minutos. También se utilizan ondículas y Análisis Multirresolución para producir efectos especiales y hacer más real el movimiento de los personajes creados en un ordenador. Tal es el caso de Toy Story II, cuyos personajes son animados usando técnicas de ondículas, a diferencia de Toy Story I en la que se utilizaron técnicas de "splines".

A propósito de la producción de efectos especiales copiamos un párrafo de [18]:

Finally, over the last 5 years, multiresolution representation of surfaces have really started to make an impact on visual effects. The Academy Award winning animated short "Geri's Game" was completely animated using subdivision surface representation...This new trend in computer graphics started with using wavelets to represent a surface at different resolutions... They are starting to take over the modeling tools that visual effects artists use.

La medicina, que tradicionalmente ha hecho uso de la transformada de Fourier y de la transformada de Radon, también ha incorporado las técnicas de ondículas a sus investigaciones y diagnósticos. Uno de sus principales problemas se enmarca dentro de los denominados problemas inversos discretos, en los que una imagen debe reconstruirse a partir de información indirecta, como en el caso de la transformada de Radon. También se ha utilizado para el diagnóstico de enfermedades, como en el estudio descrito en [9] y cuyo principal objetivo es el diagnóstico de la esclerosis múltiple a partir de los potenciales evocados de los pacientes.

Los párrafos anteriores dan una idea de las numerosas aplicaciones de las ondículas, los Análisis Multirresolución y los filtros a la tecnología actual en diversos campos. La página **www.wavelet.org** publica regularmente la revista electrónica *Wavelet Digest*, con información acerca de las nuevas publicaciones y de las reuniones programadas. En la página **www-stat.stanford.edu/~wavelab** se encuentra **Wavelab** para **Matlab 5.x**, que contiene funciones relacionadas con el análisis de ondículas e incluye numerosos conjuntos de datos para realizar experimentos.

Referencias

[1] Balian, R., *Un principe d'incertitude fort en théorie du signal ou en mécanique quantique*, C. R. Acad. Sci. Paris, **292**, Série II, 1357-1361,

(1981).

[2] Burke Hubbard, B., *The World According to Wavelets*, A. K. Peters, (1996).

[3] Berger, J., Nichols, C., *Brahms at the piano*, Leonardo Music Journal, **4**, 23-30, (1994).

[4] Brislawn, C.M., *Fingerprints Go Digital*, Notices of the AMS, **42** (11), 1278-1283, (1995).

[5] Coifman, R.R., Wickerhauser, M.V., *Entropy based algoritms for Best Basis selection*, IEEE Transactions on Information Theory, **32**, 812-718, (1992)

[6] Daubechies, I., *Orthonormal bases of compactly supported wavelets*, Comm. Pure Appl. Math., **41**, 909-996, (1988).

[7] Daubechies, I., *Ten lectures on wavelets*, CBS-NSF Regional Conferences in Applied Mathematics, **61**, SIAM, (1992).

[8] Donoho, D., *Nonlinear Wavelet Methods for Recovery of Signals, Densities, and Spectra from Indirect and Noisy Data*, en "Different Perspectives on Wavelets", Proceedings of Symposia in Pure Math., AMS., I Daubechies, Edt., **47**, 173-205, (1993).

[9] Fernández, C., *Ondículas para el estudio de señales biológicas. Algoritmos distribuidos de aprendizaje para su discriminación y para la identificación de parámetros*, Tesis Doctoral, Departamento de Matemáticas, Universidad de Oviedo, (1997).

[10] Gabor, D., *Theory of communication*, J. Inst. Elect. Eng., London, **93**(III), 429-457, (1946).

[11] Haar, A., *Zur theorie der orthogonalen funktionen systems*, Math. Ann, **69**, 331-371, (1910).

[12] Hernández, E., Weiss, G., *A First Course on Wavelets*, CRC Press, Boca Raton FL, (1996).

[13] Kahane, J.P., Lemarié-Rieusset, P.G., *Fourier series and wavelets*, Gordon and Breach Publishers, (1995).

[14] Lemarié, P.G., Meyer, Y., *Ondelettes et bases hilbertiannes*, Rev. Mat. Iberoamericana, **2**, 1-18, (1986).

[15] Mallat, S., *Multiresolution approximations and wavelet orthonormal bases for* $L^2(\mathbb{R}^d)$, Trans. of Amer. Math. Soc., **315**, 69-87, (1989).

[16] Mallat, S., *A wavelet tour of signal processing*, Academic Press, (1998).

[17] Meyer, Y., *Ondelettes et opérateurs, I: Ondelettes*, Hermann, Paris, (1990) [Versión inglesa: *Wavelets and operators*, Cambridge University Press, (1992).]

[18] Roble, D., Chan, T., *Math in the Entertainment Industry*, en Mathematics Unlimited: 2001 and Beyond., Engquist, B. y Schmid, W. (Editores), Springer, 971-990, (2001).

[19] Shannon, C. E., *Communications in the present of noise*, Proc. of the Inst. of Radio Eng., (37), 10-21, (1949).

[20] Smith, M.J., Barnwell, T.P., *Exact reconstruction techniques for tree-structured suband coders*, IEEE Trans. Acoust., Speech Signal Processing, **35**, 314-327, (1986).

[21] Weaver, W., Shannon, C. E., *The Mathematical Theory of Communication*, University of Illinois Press, (1949).