Miguel de Guzmán y la Teoría de Diferenciación de Integrales

por

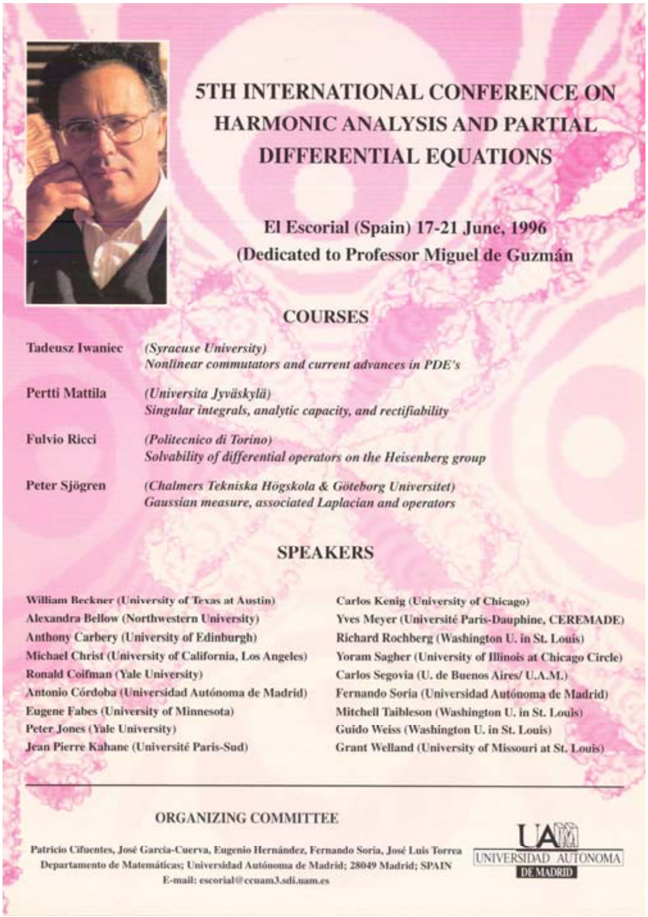
Eugenio Hernández y Fernando Soria

1 Introducción

Miguel de Guzmán será recordado por sus contribuciones en todos los campos del conocimiento a los que se acercó seducido por su inagotable curiosidad por aprender y descubrir la verdad de las cosas. Un lugar central de su producción científica por el que los matemáticos españoles le recordaremos y, en cierta forma, le estaremos siempre agradecidos, lo constituyen sin duda sus profundas aportaciones en el campo del análisis matemático. Es importante resaltar no obstante que Miguel, polifacético como era, estaba también interesado en otras áreas de la matemática como la combinatoria y la geometría y no es difícil encontrar pinceladas de una y otra en todos sus escritos científicos.

En 1996, coincidiendo con su 60 cumpleaños, los organizadores del quinto Congreso Internacional de Análisis Armónico y Ecuaciones en Derivadas Parciales, entre los que se encuentran los autores de este trabajo, decidieron dedicar el evento en su honor. Después de todo, Miguel, junto a Ireneo Peral, había sido el organizador, en 1979, del primero de estos congresos que periódicamente se vienen celebrando desde entonces. Estas notas, pensadas más para los no especialistas, están basadas en parte en la presentación que el segundo de los autores hizo en dicho congreso. Con ellas se pretende mostrar sólo algunos de los aspectos de la obra científica desarrollada por Miguel de Guzmán y, más concretamente, de aquellos relacionados con la Teoría de Diferenciación de Integrales, un campo en el que pudo y supo combinar precisamente su interés profesional en el análisis con su gran pasión por los argumentos que la geometría le proporcionaba.

Miguel de Guzmán será recordado por sus contribuciones en todos los campos del conocimiento a los que se acercó seducido por su inagotable curiosidad por aprender y descubrir la verdad de las cosas.



Abajo: Miguel rodeado de los organizadores del Congreso. De izquierda a derecha: Patricio Cifuentes, Fernando Soria, Miguel de Guzmán, Eugenio Hernández, José Luis Torrea y José García-Cuerva.

2 Diferenciación de integrales

La forma quizás más sencilla de motivar y justificar el interés por esta teoría la podemos encontrar en el mismo teorema fundamental del cálculo (TFC): Si f es una función continua definida en $\mathbb{R}$ entonces $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ es una primitiva de f; es decir,

$$F'(x) = \lim_{y\to x} \frac{F(y)-F(x)}{y-x} = \lim_{y\to x} \frac{1}{y-x}\int_x^y f(t)dt = f(x), \quad \forall x.$$

Con más generalidad, si $\{I_k\}_k$ es una familia de intervalos conteniendo todos ellos al punto x y cuyos diámetros, $|I_k|$, tienden a 0 cuando $k \to \infty$, se tiene

$$\lim_{k\to\infty} \frac{1}{|I_k|}\int_{I_k} f(t)dt = f(x), \quad \forall x.$$

Hay muchos resultados que pueden considerarse como generalizaciones del TFC. Entre ellos podríamos citar a aquellos que, basándonse en la identidad $\int_a^b F'(t)dt = F(b)-F(a)$, describen la relación entre la integral en un dominio dado de cierto operador diferencial y la integral sobre la frontera de dicho dominio, como los teorema de Stokes, Green, Gauss, etc.

Pero hay una generalización que viene de la misma concepción de la integral y que parte del siguiente

Teorema 1. (Lebesgue) *Sea f una función (localmente) integrable Lebesgue en $\mathbb{R}$. Entonces,*

$$\lim_{r\to 0} \frac{1}{|B_r(x)|}\int_{B_r(x)} f(t)dt = f(x), \quad c.t.p.\ x.$$

($B_r(x)$ denota la bola de radio r centrada en el punto x y $|B_r(x)|$ su volumen).

Puesto que la integral de una función no varía si ésta se modifica en un conjunto de medida 0, la identidad anterior debe entenderse en el sentido de “casi todo punto” (c.t.p.) x.

El resultado inicial de Lebesgue, tal como aparece en su trabajo de 1904 [Le], sólo incluye funciones acotadas, pues utiliza un teorema de la convergencia dominada más restrictivo que el que hoy conocemos. No fue hasta 1910, después de las observaciones que le hizo llegar el matemático italiano G. Vitali [Vi], de cuya obra hablaremos más tarde, que Lebesgue probó el resultado general.

Supongamos ahora que contamos con una familia $\mathcal{B} = \cup_x \mathcal{B}(x)$ de conjuntos medibles y acotados de forma que si $A \in \mathcal{B}(x)$ entonces $x \in A$, y lo suficientemente amplia como para que se tenga la propiedad de que $\forall x$, $\mathcal{B}(x)$ contiene sucesiones A_k, $k = 1, 2, \ldots$ con $\mathrm{diam} A_k \to 0$ cuando $k \to \infty$. La pregunta natural es determinar si en esta situación también se tiene para una función integrable f

$$\lim_{k\to\infty} \frac{1}{|A_k|} \int_{A_k} f(t)dt = f(x), \quad c.t.p.\ x, \tag{1}$$

cada vez que $A_k \in \mathcal{B}(x)$ y $\operatorname{diam} A_k \to 0$, $k \to \infty$. A una familia $\mathcal{B}$ como la anterior la denominaremos **base de diferenciación** y si cumple (1) entonces diremos que $\mathcal{B}$ **diferencia** f. Si ello ocurre para todos los elementos de un espacio de funciones X entonces decimos que $\mathcal{B}$ **diferencia** a la clase X. Así, el teorema de Lebesgue dice que la clase de todas las bolas de $\mathbb{R}^n$ diferencia $L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$. Lo mismo ocurre con la clase de todos los cubos. Esto falla en cambio en dimensiones $n > 1$ para la familia de todos los rectángulos de lados paralelos a los ejes aunque esta clase sí diferencia a los espacios $L^p_{loc}(\mathbb{R}^n)$, si $p > 1$. La clase de todos los paralelepípedos rectos no diferencia por otro lado a ninguno de los espacios $L^p_{loc}(\mathbb{R}^n)$, $\quad p > 0$.

Indudablemente, las propiedades de cada una de estas clases dependerá de la estructura geométrica de sus elementos. Esto puede explicar quizás el interés de Miguel por este tipo de problemas.

Miguel de Guzmán junto a Alberto Calderón y Antoni Zygmund rodeados de un grupo de matemáticos españoles delante de la entrada del Departamento de Matemáticas de la Universidad de Chicago en 1981.

3 Integrales singulares en espacios de naturaleza homogénea

Los métodos geométricos estaban bien presentes en la llamada Escuela de Chicago de análisis armónico de la que el director de tesis de Miguel, Alberto Calderón, y el director de éste, Antoni Zygmund, eran sus máximos exponentes. Miguel de Guzmán llegó a la Universidad de Chicago en un momento de auténtica ebullición de lo que ya entonces se denominaba la teoría de integrales singulares de Calderón-Zygmund, un novedoso método para el estudio cualitativo de las ecuaciones en derivadas parciales.

Su tesis doctoral, [Gu1], defendida en 1968 y publicada en 1970 en la Real Academia de Ciencias de Madrid, trata precisamente del comportamiento de integrales singulares con homogeneidad mixta, generalizando resultados previos de otros alumnos de la Escuela de Chicago como E. Fabes o N. Rivière, y cuya aplicación más inmediata estaba en el estudio de las ecuaciones de tipo parabólico.

Uno de los resultados más importantes de esta memoria trata de la existencia del valor principal de operadores de la forma

$$Kf(x) = \lim_{\epsilon \to 0^+} \int_{\rho_0(y) > \epsilon} k(y)\, f(x-y)\, dy,$$

donde k es un núcleo localmente integrable en $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ que cumple la condición de homogeneidad $k(T_\lambda x) = \lambda^{-m} k(x), \quad \lambda > 0$, y $T_\lambda = \exp(P \log \lambda)$ es el grupo de transformaciones asociado a una matriz expansiva P, con $m = \mathrm{tr} P$. Por otro lado, $\rho_0(x)$, que viene definido como la solución a la ecuación $\exp(-P \log \rho_0)(x) = 1$, da lugar a una métrica invariante por traslaciones, $\rho(x, y) = \rho_0(|x - y|)$, cuyas bolas asociadas B_r tienen la propiedad doblante $|B_{2r}| \leq C|B_r|$, para cierta constante C independiente de r.

Para probar un resultado de este tipo, uno está obligado a encontrar en cada caso una descomposición de funciones semejante a la usada por Calderón y Zygmund cuando se trata de homogeneidad simple (véase por ejemplo el libro de E. Stein [St1]). En el caso de Miguel, este lema eminentemente geométrico, es semejante al probado por Whitney (ver [Gu2] o Teorema 2.3 en [Gu5]).

Tras su paso por Chicago, Miguel de Guzmán fue a trabajar a la Universidad Washington de Saint Louis, aceptando una invitación del profesor G. Weiss. Allí conoció a R. Coifman con el que continuó trabajando en su programa de integrales singulares de homogeneidad mixta. Fruto de esta colaboración es el trabajo [CGu] en el que describen condiciones mínimas para que la teoría pueda desarrollarse en situaciones más generales que la del caso euclídeo. Así por ejemplo, para que se pueda hablar de nuevo de una descomposición geométrica de funciones a la Calderón-Zygmund es suficiente que el espacio subyacente X esté dotado de una cuasi-métrica

$$\rho : X \times X \to \mathbb{R}_+, \qquad (\rho(x, y) = \rho(y, x), \quad \rho(x, y) \leq C(\rho(x, z) + \rho(z, y))),$$

de forma que la familia de bolas asociadas, $\{B_r(x)\}_{r,x}$, tenga la propiedad siguiente:

"Existe un entero positivo N tal que $\forall x \in X$, $\forall r > 0$, no se pueden encontrar N puntos $x_i \in B_r(x)$ con $\rho(x_i, x_j) \geq r/2$, si $i \neq j$".

El tratamiento sistemático de estos aspectos, que es el origen de lo que se conoce como teoría de los espacios de naturaleza homogénea, aparecería años más tarde en la monografía de R. Coifman y G. Weiss [CW].

4 Operadores maximales

Durante su estancia en St. Louis, Miguel escribe sus primeros trabajos sobre diferenciación de integrales, algunos en colaboración con G. Welland (ver [GuW]). Para describir algunos de estos resultados es preciso recordar la demostración que Hardy y Littlewood dieron sobre el Teorema de diferenciación de Lebesgue ([HL]):

La mejor forma de controlar un fenómeno de convergencia, en este caso el de las medias integrales $m_r f(x) = \frac{1}{|B_r(x)|} \int_{B_r(x)} f(t)dt$, cuando $r \to 0$, es a través de un operador maximal. Así, Hardy y Littlewood definieron para $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$,

$$Mf(x) = \sup\{\frac{1}{|B|} \int_B |f(y)|\, dy : \quad B \text{ bola}, \quad x \in B\}, \tag{2}$$

y del cual probaron el siguiente bello y, en cierto modo, inesperado:

TEOREMA 2. (HARDY-LITTLEWOOD) *Existe una constante universal C_n, que sólo depende de la dimensión, tal que cualesquiera que sean $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ y $\lambda > 0$, se tiene*

$$|\{x \in \mathbb{R}^n : \quad Mf(x) > \lambda\}| \leq C_n \frac{1}{\lambda} \int_{\mathbb{R}^n} |f(y)|\, dy. \tag{3}$$

Es fácil ver que de la desigualdad (3) se sigue el teorema de Lebesgue. En principio, basta probar que existe $\lim_{r\to 0^+} m_r f(x)$ c.t.p. (el que además coincida con la propia $f(x)$ se puede deducir por un argumento simple de núcleos de sumabilidad). Dado $\lambda > 0$, queremos ver entonces que el conjunto

$$A_\lambda = \{x : \quad \limsup m_r f(x) - \liminf m_r f(x) > \lambda\}$$

tiene medida 0. Ahora bien, el resultado es cierto para funciones continuas con soporte compacto, $\mathcal{C}_c(\mathbb{R}^n)$. Por tanto si $g \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^n)$,

$$A_\lambda = \{x : \quad \limsup m_r(f-g)(x) - \liminf m_r(f-g)(x) > \lambda\}$$

$$\subset \{x : 2M(f-g)(x) > \lambda\}.$$

Usando (3) queda

$$|A_\lambda| \leq C_n \frac{2}{\lambda} \int_{\mathbb{R}^n} |f(y) - g(y)|\, dy,$$

y la densidad de $\mathcal{C}_c(\mathbb{R}^n)$ hace el resto.

La desigualdad de Hardy y Littlewood permite ver que el fenómeno de convergencia es cierto para bolas no necesariamente centradas en el punto de diferenciación, puesto que esta convergencia está también dominada por el operador M.

Para un base de diferenciación $\mathcal{B}$ cualquiera podemos definir como en (2) el operador maximal asociado

$$M_{\mathcal{B}} f(x) = \sup\{\frac{1}{|B|} \int_B |f(y)|\, dy : \quad B \in \mathcal{B}(x)\}.$$

Queda claro que una desigualdad como la (3) para $M_{\mathcal{B}}$ demostraría la convergencia de medias integrales y, por tanto, el que $\mathcal{B}$ diferencie a L^1. Lo sorprendente es que, como probaron Miguel de Guzmán y G. Welland, ambos sucesos son, de hecho, equivalentes.

Teorema 3. Si $\mathcal{B}$ en una clase de diferenciación de $\mathbb{R}^n$ invariante por traslaciones y dilataciones, entonces son equivalentes

a) $\mathcal{B}$ diferencia $L^1(\mathbb{R}^n)$

b) Existe C tal que $\forall \lambda > 0, \forall f \in L^1(\mathbb{R}^n)$

$$|\{x \in \mathbb{R}^n : \quad M_{\mathcal{B}} f(x) > \lambda\}| \leq \frac{C}{\lambda} \int_{\mathbb{R}^n} |f(y)|\, dy.$$

En este sentido, Miguel bebía de las mismas fuentes que sus maestros, porque fue Calderón el primero en observar este tipo de relación tan estrecha entre convergencia de operadores y acotación del operador maximal asociado: Si $f \in L^2(\mathbb{T})$ y definimos la suma parcial de Fourier

$$S_N f(x) = \sum_{k=-N}^{N} \widehat{f}(k) e^{2\pi i k x}, \qquad \widehat{f}(k) = \int_0^1 f(t) e^{-2\pi i k t} dt,$$

entonces son equivalentes la convergencia puntual de la serie de Fourier $\lim_{N\to\infty} S_N f(x) = f(x)$, c.t.p., $\forall f \in L^2(\mathbb{T})$ y la desigualdad para el operador maximal $S^* f(x) = \sup_N |S_N f(x)|$

$$|\{x \in \mathbb{T} : \quad S^* f(x) > \lambda\}| \leq \frac{C}{\lambda^2} \int_{\mathbb{T}} |f(t)|^2\, dt, \quad \forall \lambda > 0, \tag{4}$$

(que denominamos de **tipo débil-L^2**).

Zygmund estaba tan convencido de que la desigualdad (4) para S^* era imposible que en su libro *Trigonometric Series* [Zy1] llegó a escribir: " ... and this result throws some light upon the still unsolved problem of the existence of an $f \in L^2(\mathbb{T})$ whose Fourier series diverges a.e.". Obviamente Zygmund no podía imaginar en ese momento que Carleson terminaría probando años más tarde su aclamado teorema sobre la convergencia puntual de series de Fourier [Ca].

El resultado de Calderón fue extendido por E. Stein, [St2], a operadores más generales invariantes frente a traslaciones en los espacios L^p, si $1 \leq p \leq 2$. Es decir, en ese rango la convergencia de operadores, pongamos de convolución para simplificar, en la clase L^p es cierta si y sólo si lo es sobre una clase densa (e.g. $\mathcal{C}_c^\infty$) y el operador maximal satisface una desigualdad de tipo débil-L^p, semejante a la (4). Si los operadores son positivos, entonces el resultado se extiende a todo el rango $1 \leq p < \infty$ (ver [Saw]), aunque en ambos casos el espacio de medida subyacente debe ser finito. El teorema para clases de diferenciación que hemos mencionado es en cambio sobre todo el dominio $\mathbb{R}^n$.

Había ya en la literatura otros ejemplos que mostraban la diferenciación de una clase a partir de la acotación de su operador maximal asociado. Entre ellos mencionamos el célebre

TEOREMA 4. (JESSEN, MARCINKIEWICZ Y ZYGMUND) *Sea $\mathcal{B}_2$ la familia de todos los rectángulos de $\mathbb{R}^n$ con lados paralelos a los ejes y denotemos por M_s el operador maximal asociado. Entonces se tiene la desigualdad*

$$|\{x \in \mathbb{R}^n : \quad M_s f(x) > \lambda\}| \leq C \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|f|}{\lambda} \left(1 + \log^+ \frac{|f|}{\lambda}\right)^{n-1} dx, \qquad (5)$$

donde C es una constante independiente de $\lambda > 0$ y de la función f.

Obviamente este resultado implica la diferenciación por $\mathcal{B}_2$ de todas las funciones que pertenezcan, localmente, al espacio de Orlicz $L(\log^+ L)^{n-1}(\mathbb{R}^n)$ y, en particular, a las del espacio $L^p(\mathbb{R}^n)$, si $p > 1$.

La demostración que nos propone Miguel de Guzmán de la desigualdad (5) ([Gu4]) (véase también [FGG]) es de una sencillez admirable, basándose en la inducción sobre la dimensión n y en la siguiente observación:

Si $\mathcal{M}$ es un operador maximal definido sobre medias integrales, entonces $\mathcal{M}f(x) \leq ||f||_\infty$. En particular, si $\lambda > 0$ y definimos $f^\lambda(x) = f(x)$ si $|f(x)| > \lambda/2$ y $f^\lambda(x) = 0$ en caso contrario, entonces

$$\{x : \mathcal{M}f(x) > \lambda\} \subset \{x : \mathcal{M}f^\lambda(x) > \lambda/2\} \qquad (6)$$

Por simplicidad, probemos el caso $n = 2$ de (5). Si $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, definimos por $M_j, j = 1, 2$, el operador maximal unidimensional actuando sólo sobre la variable x_j. Es fácil ver que cada uno de ellos es de tipo débil-L^1 y que además se tiene la desigualdad puntual $M_s f(x) \leq M_2(M_1 f)(x)$. Usando (6) queda

$$\begin{aligned}
|\{x : M_s f(x) > \lambda\}| &\leq |\{x : M_2(M_1 f)(x) > \lambda\}| \\
&\leq \frac{C}{\lambda/2} \int_{\{x : M_1 f(x) > \lambda/2\}} M_1 f(x) dx \\
&= \frac{2C}{\lambda} \left(\frac{\lambda}{2} |\{x : M_1 f(x) > \lambda/2\}| + \int_{\lambda/2}^{\infty} |\{x : M_1 f(x) > t\}| dt \right) \\
&\leq \frac{C'}{\lambda} \left(\int_{\mathbb{R}^2} |f(x)| dx + \int_{\lambda/2}^{\infty} \int_{\{x : |f(x)| > t/2\}} \frac{|f(x)|}{t} dx dt \right) \\
&\sim \int_{\mathbb{R}^2} \frac{|f(x)|}{\lambda} \left(1 + \log^+ \frac{|f(x)|}{\lambda} \right) dx
\end{aligned}$$

Supongamos ahora que queremos probar que la clase $\mathcal{B}_2$ no diferencia $L^1(\mathbb{R}^n)$, si $n \geq 2$, y recordemos la equivalencia entre esto y la acotación del operador maximal asociado. Bastaría por tanto ver que M_s no es de tipo débil-L^1. Lo hacemos en $\mathbb{R}^2$:

Elegimos $f = \chi_{[0,1]^2}$, y tomamos $0 < \lambda < 1$ arbitrario. Se comprueba fácilmente que el conjunto de nivel $\{x \in \mathbb{R}^2 : M_s f(x) \geq \lambda\}$ contiene a todos los rectángulos R de la forma $R = [0, u] \times [0, 1/u\lambda]$, con $1 \leq u \leq 1/\lambda$. Por tanto

$$|\{x \in \mathbb{R}^2 : M_s f(x) \geq \lambda\}| \geq \int_1^{1/\lambda} \frac{1}{u\lambda} du = \frac{1}{\lambda} \log \frac{1}{\lambda}, \quad 0 < \lambda < 1.$$

Si M_s fuese de tipo débil-L^1, existiría una constante C independiente de $\lambda > 0$ tal que $|\{x \in \mathbb{R}^2 : M_s f(x) \geq \lambda\}| \leq C/\lambda$, pero esto contradice la desigualdad anterior. (Saks probó de hecho que el conjunto de funciones que son diferenciadas por la base $\mathcal{B}_2$ es de primera categoría en $L^1(\mathbb{R}^n)$, $n \geq 2$ [Sak]).

5 Lemas de recubrimiento

En la sección anterior hemos visto la importancia que tiene la acotación de los operadores maximales en la teoría de diferenciación. Esta acotación está ligada obviamente a las propiedades geométricas de los elementos de la base y, muy particularmente, a la existencia de lemas de cubrimiento. Veamos esto con un ejemplo. Uno de los argumentos más frecuentes hoy en día para demostrar la desigualdad (3) de Hardy y Littlewood viene del siguiente resultado, debido esencialmente a Vitali [Vi]:

Lema 5. *Sea A un conjunto medible y acotado en $\mathbb{R}^n$ que suponemos recubierto por una familia finita de bolas $\{B_\alpha\}$. Entonces podemos extraer una subfamilia* *de bolas disjuntas, $\{\overline{B}_k\}$, con la propiedad*

$$|A| \leq C \sum_k |\overline{B}_k|. \tag{7}$$

(C representa una constante universal que sólo depende de la dimensión).

Para probar (3), consideramos un conjunto compacto $K \subset \{x : Mf(x) > \lambda\}$. Entonces, K está recubierto por una familia finita de bolas $\{B_\alpha\}$ que cumplen

$$\frac{1}{|B_\alpha|} \int_{B_\alpha} |f(y)|dy > \lambda.$$

Por el lema 5, podemos elegir una subfamilia disjunta $\{\overline{B}_k\}$ con la propiedad (7) y se tiene

$$|K| \leq C \sum_k |\overline{B}_k| \leq C \sum_k \frac{1}{\lambda} \int_{\overline{B}_k} |f(y)|dy = \frac{C}{\lambda} \int_{\cup \overline{B}_k} |f(y)|dy \leq \frac{C}{\lambda} \int_{\mathbb{R}^n} |f(y)|dy$$

Por otro lado, la demostración del lema está basada en una propiedad elemental de la geometría euclídea:

"Si B y B' son dos bolas con $B \cap B' \neq \emptyset$ y $|B'| \leq |B|$, entonces $B' \subset 3B$, donde $3B$ representa la bola concéntrica con B y radio tres veces el de ésta".

Ordenando las bolas $\{B_\alpha\}$ por tamaño decreciente y eligiendo $\overline{B}_1$ como la mayor, vamos eligiendo ordenadamente aquellas primeras que son disjuntas de las ya elegidas. Por la observación anterior, deducimos $\cup_\alpha B_\alpha \subset \cup_k 3\overline{B}_k$ y por tanto $|A| \leq 3^n \sum_k |\overline{B}_k|$.

La propiedad anterior para bolas euclídeas la comparten entre otras la clase de todos los cubos de $\mathbb{R}^n$ y, con más generalidad, la familia de dilatados y trasladados de un cuerpo convexo dado, pero no la familia de todos los rectángulos por ejemplo.

El interés que sentía Miguel de Guzmán por encontrar la relación precisa entre lemas de cubrimiento, acotación del operador maximal y propiedades de diferenciación se puede apreciar en varios de sus trabajos. En el primer capítulo de su libro [Gu5] (ver también [Gu3]), Miguel analiza en profundidad tres tipos de lemas de cubrimiento:

1. Lemas de tipo Besicovitch: aquellos en los que uno puede elegir un número fijo (universal) de familias disjuntas recubridoras a partir de una dada.

2. Lemas de tipo Whitney: en donde la selección de las subfamilias recubridoras de un conjunto abierto dado guarda una relación entre su diámetro y la distancia a la frontera.

3. Lemas de tipo Vitali: aquellos en los que la norma de la función de solapamiento de la familia recubridora está controlada por la medida del conjunto recubierto.

El primero de estos tipos es adecuado para el caso de bases de diferenciación $\mathcal{B} = \cup\mathcal{B}(x)$, de forma que los elementos de $\mathcal{B}(x)$ están de alguna forma "centrados" en el punto x. El segundo es apropiado para los lemas de descomposición de Calderón-Zygmund en la teoría de integrales singulares. El tercero, dependiendo del tipo de norma elegida para el control de la función de solapamiento, es apropiado para describir la diferenciación en el espacio de norma dual (véase a este respecto el apéndice I de [Gu5]).

6 El libro amarillo

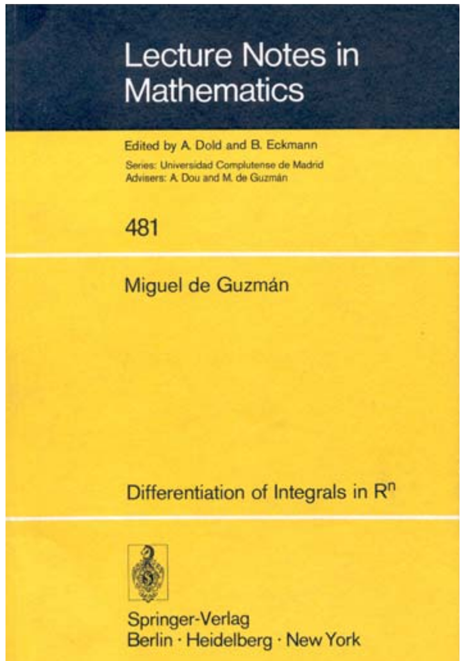
Al final de su estancia en los Estados Unidos, en 1969, Miguel de Guzmán regresa al Departamento de Ecuaciones Funcionales de la Universidad Complutense de Madrid, dirigido por A. Dou, y comienza una frenética carrera por introducir líneas de investigación y métodos de trabajo aprendidos durante dicha estancia. Se rodea de un nutrido grupo de estudiantes con los que empieza a discutir las técnicas del análisis usadas en los trabajos de los matemáticos más importantes de la época, y los problemas abiertos más pujantes en esos momentos, pero sobre todo relacionados con la teoría de diferenciación de integrales. Algunos de esos estudiantes terminarán haciendo la tesis doctoral con él en ese tema, como es el caso de Baldomero Rubio e Ireneo Peral ([Ru], [Pe]). A otros les sugiere que se desplacen a universidades americanas para que recojan el testigo directamente de las fuentes. El ciclo continúa.

El seminario de análisis de la Sección de Matemáticas de la UCM se convierte en uno de los más activos de España. Con un esquema semejante a los que tenían lugar en centros de gran tradición, por él pasan matemáticos de la talla de A. Calderón, L. Carleson o Y. Meyer. Pero además la actividad no se detiene. Siempre hay algo interesante que presentar, una nueva idea que discutir, un artículo reciente que entender o un problema abierto que abordar.

Como fruto de esos casi 5 años de investigación, Miguel de Guzmán escribe una monografía titulada "*Differentiation of Integrals in* $\mathbb{R}^n$", que aparece publicada en la serie "Lectures Notes in Mathematics" de la editorial Springer-Verlag. El libro "amarillo", como lo llamábamos los que primero nos acercamos a él como fuente de estudio e inspiración, se convirtió en un clásico casi desde su aparición. Fueron numerosos los especialistas de dentro y fuera del país los que se sintieron atraídos por sus interesantes planteamientos y la belleza de su discurso. Para la matemática española fue todo un hito. Por primera vez en muchos años se exportaba ciencia matemática, o al menos se ponía la primera piedra para invertir la tendencia producida por el aislamiento científico que había sufrido España durante tanto tiempo.

El libro amarillo contiene todos los temas que hemos mencionado aquí: lemas de cubrimiento, operadores maximales y propiedades geométricas de bases de diferenciación específicas. Es también como una colección de historias matemáticas donde las obras de Lebesgue, Vitali, Bohr, Saks, Banach, Zygmund, Jessen, Marcinkiewicz, Hardy, Littlewood, Mazurkievicz, Saks, Nikodym, Busemann, Feller, de Possel, Besicovitch, Hayes, Pauc, Bruckner, Kakeya, Perron y muchos más, son desmenuzadas y convenientemente reescritas desde una perspectiva fácilmente asimilable.

Hay muchos más temas que aparecen en el libro y que no podríamos describir aquí con el detalle debido. Entre estos temas merece la pena destacar muy especialmente las construcciones recogidas en el capítulo V y relacionadas con la base de todos los rectángulos en $\mathbb{R}^n$: el árbol de Perron; la solución al problema de Kakeya sobre cómo rotar una aguja de forma continua y minimizando el área de barrido; el conjunto de Nikodym y otros. Muchas de estas construcciones se justifican por la necesidad de encontrar diversos contraejemplos en la teoría de diferenciación. Pero su interés geométrico va más allá de ésta, hasta el punto de que Miguel retomaría el estudio de algunos problemas pendientes años después en colaboración con P. Mattila, M. Morán, M.A. Martín, M. Reyes y otros. Así formó un grupo de investigación sobre teoría geométrica de la medida y análisis armónico sobre fractales que sigue activo después de casi 20 años de trabajo continuo.



A continuación mencionamos algunos otros de los problemas sobre diferenciación que más interesaron a Miguel y que continuan abiertos:

La conjetura del halo. Se deduce a partir del teorema de Hardy y Littlewood que si $f = \chi_A$ denota la función característica de un conjunto medible A entonces

$$|\{x: \quad M\chi_A(x) > \lambda\}| \leq C|A|\frac{1}{\lambda}, \qquad 0 < \lambda < 1.$$

Asimismo, el teorema de Jessen, Marcinkiewicz y Zygmund nos da

$$|\{x \in \mathbb{R}^n : \quad M_s\chi_A(x) > \lambda\}| \leq C|A|\frac{1}{\lambda}(1+\log\frac{1}{\lambda})^{n-1}, \qquad 0<\lambda<1.$$

Dada una base de diferenciación $\mathcal{B} = \cup\mathcal{B}(x)$, diremos que $\mathcal{B}$ es de **Busemann-Feller** si $R \in \mathcal{B}$ y $x \in R$ implica $R \in \mathcal{B}(x)$. Para una de estas bases definimos la función

$$\Phi_{\mathcal{B}}(u) = \Phi(u) = \sup\{\frac{1}{|A|}|\{x : \quad M_{\mathcal{B}}\chi_A(x) > 1/u\}| : \quad A\,\text{medible}\} \qquad 1<u.$$

($\Phi(u) = u$ si $0 < u \leq 1$.) Supondremos que $\Phi(u)$ es finita $\forall u > 0$, lo cual es equivalente a que $\mathcal{B}$ diferencie a las funciones características de conjuntos medibles. Φ se conoce como la **función del halo** de $\mathcal{B}$ por la forma característica que adquiere el conjunto $\{x : \quad M_{\mathcal{B}}\chi_A(x) > 1/u\}$ cuando A es, por ejemplo, una bola centrada en el origen. La **conjetura del halo** consiste en determinar que si $\mathcal{B}$ es una base de diferenciación de Busemann-Feller invariante por rotaciones, entonces $\mathcal{B}$ diferencia a la clase $\Phi(L) = \{f : \int\Phi(|f|)dx < \infty\}$. A partir de la relación entre diferenciación y acotación del operador maximal, se trata, esencialmente, de probar la desigualdad

$$|\{x : \quad M_{\mathcal{B}}f(x) > \lambda\}| \leq C\int\Phi\left(\frac{|f|}{\lambda}\right)dx,$$

para $\lambda > 0$ y f medible sabiendo que el resultado es cierto para funciones características. Es decir, a partir de una desigualdad de tipo débil-$\Phi(L)$ "restringido" para $M_{\mathcal{B}}$, queremos obtener una desigualdad de tipo débil-$\Phi(L)$ general.

De los resultados de E. Stein y G. Weiss [SW] (ver también el apéndice I de [Gu5]) se deduce que si $\Phi_{\mathcal{B}}(u) \sim u^p, 1 < p$, entonces $\mathcal{B}$ diferencia $L^{p,1}$. La conjetura asegura no obstante que $\mathcal{B}$ debe diferenciar a todo L^p.

Miguel nos muestra en el capítulo VIII de [Gu5] que si la conjetura del halo fuera cierta para toda base $\mathcal{B}$ de diferenciación de Busemann-Feller invariante por rotaciones, entonces las funciones del halo Φ serían doblantes ($\Phi(2u) \leq C\Phi(u)$), con C independiente de u). Asimismo, prueba que si σ es tal que $\limsup_{u\to\infty}\frac{\Phi(u)}{\sigma(u)} = \infty$ entonces $\mathcal{B}$ **no** diferencia a la clase $\sigma(L)$.

La conjetura ha podido ser establecida sólo en el caso $\Phi(u) \sim u$ a partir de los trabajos de Moon (recogidos en el libro [BS]) e, independientemente, de R. Moriyón (ver el apéndice III de [Gu5]). Existen resultados parciales que indican un acercamiento progresivo a la resolución de la conjetura. Por ejemplo, se sabe a partir de ciertos argumentos de Carleson y Sjölin en [Sj] que si $\Phi(u) \sim u(1+\log^+ u)^m$ entonces $\mathcal{B}$ diferencia $L(\log^+ L)^m \log^+\log^+ L$ (ver [So2]). Resultados recientes de Antonov ([An]) permiten mejorar esto hasta el espacio $L(\log^+ L)^m \log^+\log^+\log^+ L$ (ver [SjS]). Sin embargo, el resultado completo parece en estos momento estar lejos de ser establecido.

El problema de Zygmund. Generalizando su propio resultado con Jessen y Marcinkiewicz (Teorema 4), Zygmund probó en [Zy2] que si $\mathcal{B}_{n,s}$, $(s \leq n)$ representa la clase de todos los rectángulos de lados paralelos a los ejes, pero con a lo sumo sólo s de ellos de longitudes distintas, entonces $\mathcal{B}_{n,s}$ diferencia $L(\log^+ L)^{s-1}(\mathbb{R}^n)$. Pareciera que son los grados de libertad (s) y no la dimensión del espacio subyacente (n) los que determinaran las propiedades de diferenciación de la base. A partir de ello, Zygmund propuso el siguiente problema:

Sean k y n dos enteros positivos con $k \leq n$. Consideremos funciones $\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_n : (\mathbb{R}_+)^k \to [0, \infty)$ crecientes en cada una de sus variables. Denotemos por $\mathcal{B}$ la familia de todos los rectángulos de $\mathbb{R}^n$ de lados paralelos a los ejes cuyas longitudes vienen dadas respectivamente por

$$\phi_1(t_1, \ldots, t_k), \phi_2(t_1, \ldots, t_k), \ldots, \phi_n(t_1, \ldots, t_k)$$

para algunos $t_1, \ldots, t_k > 0$. Probar que $M_{\mathcal{B}}$ satisface la desigualdad de tipo débil-$L(\log^+ L)^{k-1}(\mathbb{R}^n)$:

$$|\{x \in \mathbb{R}^n : \quad M_{\mathcal{B}} f(x) > \lambda\}| \leq C \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|f|}{\lambda} \left(1 + \log^+ \frac{|f|}{\lambda}\right)^{k-1} dx,$$

El problema no viene enunciado explícitamente en la monografía [Gu5], salvo por el propio resultado de Zygmund que generaliza al Teorema 4. Sin embargo Miguel siempre tuvo una especial predisposición por todo cuanto aconteciera alrededor del mismo.

No es difícil ver que los casos $k = 1$ o $k = n$ se siguen de otros ya conocidos. Se sabe que el resultado es cierto para $n = 3$ y $k = 2$ si $\phi_1(t_1, t_2) = t_1, \phi_2(t_1, t_2) = t_2$ y $\phi_3(t_1, t_2)$ general ([Co]), o en el caso de que exista un cambio de variables adecuado entre cada pareja $(\phi_i, \phi_j), i \neq j$, por ejemplo si cada una es un monomio $\phi_j(t_1, t_2) = t_1^{a_j} t_2^{b_j}$ ([So1]). Sin embargo la conjetura es falsa con la generalidad con que está enunciada (ver [So1]). Sería muy interesante no obstante determinar qué ocurre en casos especiales, como cuando $k = n - 1$ y además $\phi_j(t_1, \ldots, t_{n-1}) = t_j, j = 1, \ldots, n - 1$.

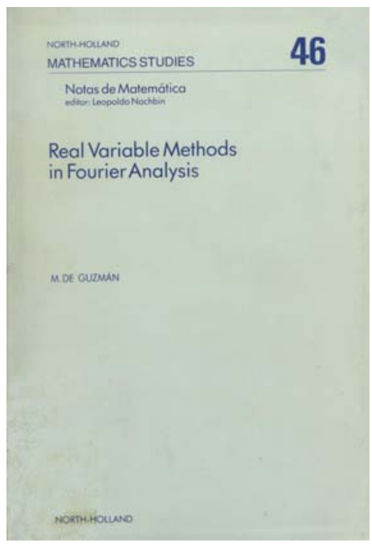
7 Epílogo

La teoría de diferenciación de integrales ha ido evolucionando indudablemente en estos casi 30 años que han transcurrido desde la publicación de la monografía de Springer-Verlag. Por un lado se han abierto nuevas vías de investigación en torno a problemas de diferenciación a lo largo de curvas, superficies y, en general, conjuntos de dimensión inferior a la del espacio subyacente. El motivo hay que buscarlo en el control que los operadores maximales ejercen sobre nuevas integrales fuertemente singulares. Por otro, el comportamiento de los multiplicadores clásicos de la transformada de Fourier, como los operadores de Bochner-Riesz, el multiplicador del cono y otros, aparece estrechamente ligado a las propiedades de acotación de operadores asociados a familias de rectángulos de determinadas excentricidad y direcciones, como el operador de Besicovitch o el de Kakeya. Muchos son los matemáticos que se han interesado por este tipo de problemas a lo largo de los años, desde J. Bourgain, A. Carbery, A. Córdoba, M. Christ, A. Nagel, E. Stein, S. Wainger o T. Wolff hasta, más recientemente, N. Katz, I. Laba o T. Tao, por mencionar sólo algunos.

Las técnicas han ido evolucionando también de forma espectacular. Los métodos geométricos asociados a lemas de cubrimiento han ido dejando paso a métodos analíticos de la tranformada de Fourier, relacionados en muchos casos con las propiedades de restricción de ésta, e incluso a métodos de combinatoria y teoría de números.

Miguel era consciente de estos avances y en más de una ocasión[1] estuvo tentado de escribir una versión actualizada de su libro sobre diferenciación. Resulta triste pensar que este proyecto, al igual que muchos otros que tanto le entusiasmaban, no podrá llevarlo a cabo ya.

El Libro de Springer-Verlag *Differentiation of Integrals in* $\mathbb{R}^n$ no fue la única monografía especializada que Miguel de Guzmán escribió. En 1981 publicó otra en la editorial North Holland titulada *Real Variable Methods in Fourier Analysis* [Gu6]. En ella recopilaba algunas de las técnicas en análisis armónico más usadas en esa época, como por ejemplo variaciones del principio de uniformidad de Banach para el estudio de la convergencia puntual de operadores, la finitud y el tipo de operadores maximales relacionados con el problema de la convergencia, discretización, lemas de cubrimiento, las teorías de interpolación y extrapolación, mayorización en media, linealización, sumación en el espacio débil-L^1, el método de rotaciones, el lema de Cotlar, así como ejemplos específicos donde poder usar dichas técnicas (aproximaciones de la identidad, integrales singulares a lo largo de curvas, el multiplicador del disco y más).



[1]Comunicación personal al segundo autor.

Varias generaciones de matemáticos le recordaremos y le estaremos siempre agradecidos... por su generosidad y dedicación, por dejarnos un modelo a seguir y, sobre todo, por lo mucho que aprendimos de él.

La metodología usada para redactar esta memoria fue semejante a la utilizada con la anterior: largas jornadas de debate con sus colegas y estudiantes en el seminario, dirección de trabajos de investigación y búsqueda de problemas abiertos sobre los que poder profundizar y aplicar esas técnicas, algunas de las cuales, como por ejemplo las relacionadas con discretización, eran de su propia cosecha.

La producción de artículos de investigación de Miguel en análisis no fue muy numerosa. Viene bien recordar, no obstante, una frase de A. Zygmund en la que estimaba que la dedicación que había prestado a la redacción de su libro "*Trigonometric Series*" le había quitado la posibilidad de haber escrito hasta 30 artículos más de los que publicó[2]. Al parecer esto llegó a oídos de Littlewood quien le escribió asegurándole que su esfuerzo había merecido la pena y que varias generaciones de matemáticos le estarían agradecidos por ello. Miguel de Guzmán escribió no una sino dos monografías de primerísimo nivel a las que dedicó casi 12 años de su vida y, sí, como con Zygmund, varias generaciones de matemáticos le recordaremos y le estaremos siempre agradecidos. También por su generosidad y dedicación, por dejarnos un modelo a seguir y, sobre todo, por lo mucho que aprendimos de él.

REFERENCIAS

[An] N. YU. ANTONOV, *Convergence of Fourier series.* East J. Approx., **2** (1996), 187–196.

[BS] C. BENNETT, R. SHARPLEY, *Interpolation of operators.* Pure Appl. Math., **129**. Academic Press, 1988.

[Ca] L. CARLESON, *On convergence and growth of partial sums of Fourier series.* Acta Mat., **116** (1966), 135–157.

[CGu] R. COIFMAN, M. DE GUZMÁN, *Singular integrals and multipliers on homogeneous spaces.* Rev. Un. Mat. Argentina, **25** (1970/71), 137–143.

[CW] R. COIFMAN, G. WEISS, *Analyse harmonique non-commutative sur certains spaces homogènes.* Springer Verlag, Lectures Notes **242**, 1971.

[Co] A. CÓRDOBA, *La razón geométrica del teorema fundamental del Cálculo.* LA GACETA DE LA RSME **3** (2000), no. 3, 435–446.

[2]Véase la nota biográfica sobre Zygmund escrita por G. Weiss en [We].

[FGG] N.A. Fava, E.A. Gatto, C. Gutiérrez, *On the strong maximal function and Zygmund's class $L(\log^+ L)^n$*. Studia Math. **69** (1980/81), no. 2, 155–158.

[Gu1] M. de Guzmán, *Singular integrals with generalized homogeneity.* Rev. Acad. Ci. Madrid, **64** (1970), 77–137.

[Gu2] M. de Guzmán, *A covering lemma with applications to differentiability of measures and singular integral operators.* Studia Math, **34** (1970), 299–317.

[Gu3] M. de Guzmán, *On the derivation and covering properties of a differentiation basis.* Studia Math, **44** (1972), 359–364.

[Gu4] M. de Guzmán, *An inequality for the Hardy-Littlewood maximal operator with respect to a product of differentiation bases.* Studia Math, **49** (1972), 185–194.

[Gu5] M. de Guzmán, *Differentiation of integrals in* $\mathbb{R}^n$. Springer Verlag, Lecture notes **481**, 1975.

[Gu6] M. de Guzmán, *Real Variable Methods in Fourier Analysis.* North Holland Math. Studies **104**, 1981.

[GuW] M. de Guzmán, G. Welland, *On the differentiation of integrals.* Rev. Un. Mat. Argentina, **25** (1970/71), 253–276.

[HL] G.H. Hardy, J.E. Littlewood, *A maximal theorem with function-theorethical applications.* Acta Math., **54** (1930), 81–116.

[JMZ] B. Jessen, J. Marcinkiewicz, A. Zygmund, *Note on the differentiability of multiple integrals*, Fund. Math., **25** (1935), 217–234.

[Le] H. Lebesgue, *Sur l'intégration et la recherche des fonctions primitives.* Gauthiers Villars Ed., 1904.

[Pe] I. Peral, *Nuevos métodos en diferenciación.* Tesis Doctoral, UCM, 1974.

[Ru] B. Rubio, *Propiedades de derivación y el operador maximal de Hardy-Littlewood.* Tesis Doctoral, UCM, 1971.

[Sak] S. Saks, *Remarks on the differentiation of the Lebesgue indefinite integral.* Fund. Math, **22** (1934), 257–261.

[Saw] S. Sawyer, *Maximal inequalities of weak type.* Annals Math., **84** (1966), 157–173.

[Sj] P. Sjölin, *An inequality of Paley and convergence a.e. convergence of Walsh-Fourier series.* Ark. Mat., **7** (1968), 551–570.

[SjS] P. Sjölin, F. Soria, *Remaks on a theorem by N. Yu. Antonov.* Studia Math., **158** (1) (2003), 79–27.

[So1] F. Soria, *Example and counterexample to a conjectura in the theory of differentiation of integrals.* Annals Math., **123** (1986), 1–9.

[So2] F. Soria, *Note on differentiation of integrals and the halo conjecture.* Studia Math., **81** (1985), 29–36

[St1] E.M. STEIN, *Singular integrals and differentiability properties of functions.* Princeton U. Press, 1971.

[St2] E.M. STEIN, *On limits of sequences of operators.* Annals Math., **74** (1961), 140–170.

[SW] E.M. STEIN, G. WEISS, *Introduction to Fourier analysis on Euclidean spaces.* Princeton U. Press, 1971.

[Vi] G. VITALI, *Sui gruppi di punti a sulle funzione di variabili reali.* Atti. Acad. Sci. Torino, **43** (1908), 75–92.

[We] G. WEISS, *Antoni Zygmund: 1900-1992.* "Fourier analysis and Partial differential equationes", CRC Press, 1995.

[Zy1] A. ZYGMUND, *Trigonometric Series.* Cambridge U. Press, 1959.

[Zy2] A. ZYGMUND, *A note on the differentiability of multiple integrals*, Colloq. Math., **16** (1967), 199–204.

Eugenio Hernández y Fernando Soria
Departamento de Matemáticas
Universidad Autónoma de Madrid
28049 Madrid
correo-electrónico: `eugenio.hernandez@uam.es`, `fernando.soria@uam.es`

Miguel con algunos colegas de sus viajes a Estados Unidos (de izquierda a derecha: Yoram Sagher, Carlos Segovia, Grant Welland, Alexandra Bellow, Alberto Calderón, M. de Guzmán, Guido Weiss, Eugene Fabes, Mitchell Taibleson y Richard Rochberg) durante la celebración de la 5ª Conferencia Internacional de Análisis Armónico que se celebró en El Escorial en 1996.