

## Ondículas: historia, teoría y aplicación

por

**Eugenio Hernández**

Han pasado treinta y dos años desde que Yves Meyer estaba esperando a que uno de sus colegas de la École Polytechnique de París terminara de fotocopiar un artículo escrito por el ingeniero Jean Morlet y por el físico Alex Grossmann de Marsella<sup>1</sup>. Yves Meyer recibió una copia del artículo y se dio cuenta que contenía elementos similares a teorías de descomposición de funciones que él conocía bien de su excelente trabajo en Análisis Armónico. Tomó el tren a Marsella y las ondículas se convirtieron en una teoría que ha inspirado muchos trabajos de matemáticos, físicos e ingenieros.

El rápido crecimiento de la teoría matemática de las ondículas en los años 80 del siglo pasado, paralelo al desarrollo de las aplicaciones al tratamiento de señales, ha producido éxitos tan notables como el estándar sobre compresión de huellas digitales desarrollado por el FBI en 1993 o el desarrollo de JPEG2000, el algoritmo de compresión de imágenes usado en numerosos aparatos tecnológicos actuales. El 25 de septiembre de 2017, una búsqueda en MathScinet revela que hay 8626 artículos publicados que contienen en su título la palabra *wavelet* (ondícula).

El contenido de este artículo es, en parte, una versión escrita de la conferencia titulada *Image compression with wavelets and applications of wavelet transform to geophysics* que impartí el 25 de marzo de 2015 en el International Workshop on Mathematical Modeling and Image Compression que tuvo lugar en la Universidade Agostinho Neto de Luanda (Angola) y del Coloquio que impartí el 23 de abril de 2015 en el Departamento de Matemáticas de la Universidad Carlos III de Madrid, con el título de *Compresión de imágenes con ondículas y aplicaciones*. Refleja parte de lo que he aprendido desde que en 1994 comenzara a colaborar con el Profesor Guido Weiss (Washington University en Saint Louis, Missouri, EEUU) en la redacción del libro [21]. Hemos de añadir que en ningún caso representa una descripción exhaustiva de todo el material que se ha escrito actualmente sobre la teoría de ondículas, así como de las numerosas aplicaciones que de ellas se han realizado.

Comenzaremos con una breve descripción de la historia del desarrollo de esta teoría que marcará la ruta por la que llevaremos al lector en el resto del artículo.

Dejemos claro, antes de adentrarnos en esta ruta, que muchos científicos han contribuido a la creación de la teoría de ondículas, pero de entre ellos queremos destacar a Yves Meyer. La Academia Noruega de las Ciencias y las Letras le concedió el 23 de Mayo de 2017 el premio Abel “*por su importante papel en el desarrollo de la teoría matemática de las ondículas*”, según anunció John Rognes, Presidente del Comité que le concedió el Premio.

---

<sup>1</sup>El artículo en cuestión es [16]

## 1. UNA BREVE HISTORIA

El concepto de transformada de ondículas comenzó con los trabajos de Jean Morlet y colaboradores ([31], [32]) dedicados al análisis de las señales procedentes de la prospección de hidrocarburos. El reflejo de las señales producidas en el interior de la Tierra mediante explosiones o vibraciones son recogidas por sensores; el estudio de estas grabaciones permite obtener información sobre las capas de la Tierra y predecir la posibilidad de bolsas líquidas en su interior.

La formulación matemática comenzó con los trabajos de A. Goupillaud, A. Grossmann y J. Morlet ([15] y [16]). Como ya hemos mencionado anteriormente, fue este segundo artículo el que permitió a Yves Meyer establecer la fructífera conexión entre la descomposición de señales en ondículas de forma constante y el Análisis Armónico. Sus notas de las exposiciones en el Seminario Bourbaki del curso 1985-86 ([29]) contienen la primera publicación sobre la teoría matemática de las ondículas, que fue seguida por el artículo publicado en 1986 junto con P. G. Lemarié en la Revista Matemática Iberoamericana ([24]).

Stéphane Mallat publica en 1989 el concepto de Análisis Multirresolución (AMR) ([26], [27]) que describe una estructura con la que se puede obtener ondículas. Esto supuso un avance crucial para el resto de trabajos posteriores. Aunque los trabajos fueron publicados en 1989, el concepto de AMR fue desarrollado por S. Mallat con la ayuda de Y. Meyer en el otoño de 1986 en un encuentro de ambos concertado en la Universidad de Chicago, según cuenta B. Burke Hubbard en el libro de divulgación *The World According to Wavelets* ([3]).

Ingrid Daubechies se inspiró en el esquema piramidal laplaciano de P. Burt y E. Adelson ([4]) diseñado para descomponer y reconstruir imágenes, precursor del Análisis Multirresolución, para construir ondículas ortonormales con soporte compacto ([10]), semejantes, pero de mayor suavidad, que la desarrollada por Alfred Haar en 1910 ([19]). Estas ondículas pueden obtenerse también a partir de un AMR, como mostraremos en la sección 5.

El desarrollo de los paquetes de ondículas por R. Coifman, Y. Meyer, y V. M. Wickerhauser ([9]) permite elegir una transformada de ondículas entre varias de ellas que se adapte mejor a las particularidades que pueda tener una señal o imagen. Al mismo tiempo, A. Cohen, I. Daubechies y J. C. Feauveau desarrollaron las ondículas biortogonales con soporte compacto ([8]), más flexibles que las ondículas ortogonales de Ingrid Daubechies. Una variante de una de estas ondículas ortonormales es la que se utiliza actualmente para la compresión de imágenes con el algoritmo JPEG2000.

Gran parte de la teoría desarrollada en los primeros 10 años de vida de las ondículas está recogida en las monografías [30], [12], [7], [21] y [28]. Una presentación que solo requiere conocimientos de álgebra lineal y series de Fourier puede verse en [39]. Una historia más detallada del primer decenio de vida de las ondículas se describe en el libro de divulgación [3].

En los últimos 20 años se han desarrollado por parte de diversos autores variantes de las ondículas (coiflets, wedgelets, beamlets, ridgelets, curvelets, ...) diseñadas con la intención de mejorar las prestaciones de aquellas en el caso de imágenes bidimensionales y vídeos. De todas ellas, la que ha producido mejores resultados,

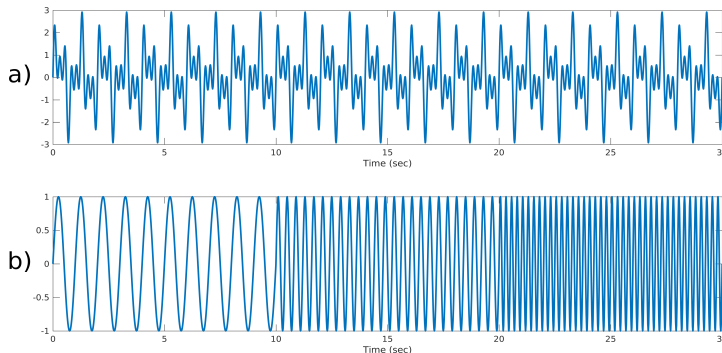


Figura 1: a) Representación gráfica de la función  $f_1(t) = \text{sen } 2\pi t + \text{sen } 5\pi t + \text{sen } 8\pi t$ ,  $0 \leq t \leq 30$ , b) Representación gráfica de la función  $f_2(t) = (\text{sen } 2\pi t) \chi_{[0,10]}(t) + (\text{sen } 5\pi t) \chi_{[10,20]}(t) + (\text{sen } 8\pi t) \chi_{[20,30]}(t)$ .

tanto teóricos como prácticos, ha sido las *shearlets*, obtenidas como una variante de las ondículas compuestas desarrolladas en [17]. El libro [23] editado por Gitta Kutyniok y Demetrio Labate contiene una descripción detallada de las shearlets y sus aplicaciones. Algoritmos numéricos para shearlets pueden descargarse desde la página web <http://www.shearlets.org>.

## 2. DEL ANÁLISIS DE FOURIER AL ANÁLISIS TIEMPO-ESCALA

La transformada de Fourier

$$\mathcal{F}f(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-2\pi i x \xi} dx$$

de una función  $f$  permite obtener información acerca de una señal, pero la información que produce para señales cuya frecuencia cambia con el tiempo, tales como la variación de temperatura de un lugar o la evolución del mercado de valores, es limitada.

Esto puede apreciarse en los siguientes ejemplos. Sea  $f_1(t) = \text{sen } 2\pi t + \text{sen } 5\pi t + \text{sen } 8\pi t$ ,  $0 \leq t \leq 30$ , una señal unidimensional formada por superposición de tres frecuencias diferentes (figura 1a)). Sea  $f_2(t) = (\text{sen } 2\pi t) \chi_{[0,10]}(t) + (\text{sen } 5\pi t) \chi_{[10,20]}(t) + (\text{sen } 8\pi t) \chi_{[20,30]}(t)$  otra señal unidimensional en  $0 \leq t \leq 30$ , formada por tres señales consecutivas diferentes (figura 1b)).

La representación gráfica del módulo de sus transformadas de Fourier,  $|\mathcal{F}f_1(\xi)|$  y  $|\mathcal{F}f_2(\xi)|$ , se muestra en la figura 2. Ambas son similares, haciendo difícil distinguir el tipo de señal,  $f_1$  ó  $f_2$ , examinando el módulo de sus transformadas de Fourier.

Una forma de solventar este problema es usando la *transformada de Fourier con ventana*. Se elige una función  $g$ , por ejemplo,  $g(x) = \chi_{[0,1]}(x)$  ó  $g(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-x^2}$ , o cualquier función con una buena localización. La **transformada de Fourier con**

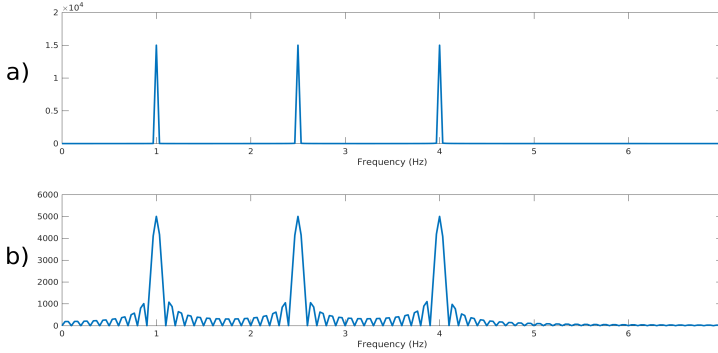


Figura 2: a) Representación gráfica del módulo de la transformada de Fourier de la función  $f_1$  de la figura 1a). b) Representación gráfica del módulo de la transformada de Fourier de la función  $f_2$  de la figura 2b).

ventana  $g$  de una señal  $f$  está dada por:

$$S_g(f)(t, \xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)g(x-t)e^{-2\pi i x \xi} dx, \quad (1)$$

Al ser una función de las variables  $t$  y  $\xi$ , la transformada  $S_g(f)(t, \xi)$  produce un análisis tiempo-frecuencia de la función  $f$  y permite conocer alrededor de un tiempo  $t$  la amplitud de la componente sinusoidal de frecuencia  $\xi$ . La función  $g$  se elige real, par y satisfaciendo  $\int_{-\infty}^{\infty} |g(x)|^2 dx = 1$  y, en estas condiciones,  $S_g(f)$  es una transformada que preserva la energía, esto es

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |S_g(f)(t, \xi)|^2 d\xi dt = \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt.$$

La representación del módulo de  $S_g(f_1)$  y  $S_g(f_2)$  tomando  $g(x)$  una función gaussiana con varianza 0.15 se muestra en la figura 3 en un sistema de coordenadas tiempo-frecuencia. Se observa en la figura 3a) que  $|S_g(f_1)(t, \xi)|$  tiene tres frecuencias superpuestas, mientras que en la figura 3b) se aprecia que  $|S_g(f_2)(t, \xi)|$  está formada por tres frecuencias consecutivas diferentes en el tiempo.

En la transformada de Fourier con ventana  $g$  su nucleo de integración  $g_{t,\xi}(x) := g(x-t)e^{-2\pi i x \xi}$  está formado por una función de amplitud fija  $g(x)$  trasladada y modulada (rellenada con ondas sinusoidales), por lo que no permite realizar análisis de variaciones más pequeñas que la amplitud de la ventana  $g(x)$ .

El estudio de singularidades de una señal se detecta mejor si se consideran transformadas integrales cuyo nucleo se obtiene con dilataciones y traslaciones de una función. Dada una función  $\psi(t), t \in \mathbb{R}$ , se considera la familia de funciones dilatadas y trasladadas  $\psi_{s,t}(x) = \sqrt{s}\psi(sx-t)$  para  $t \in \mathbb{R}$  y  $s > 0$ . La **transformada continua de ondículas** de una señal  $f$  está dada por

$$W_\psi(f)(t, s) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\sqrt{s}\psi(sx-t) dx. \quad (2)$$

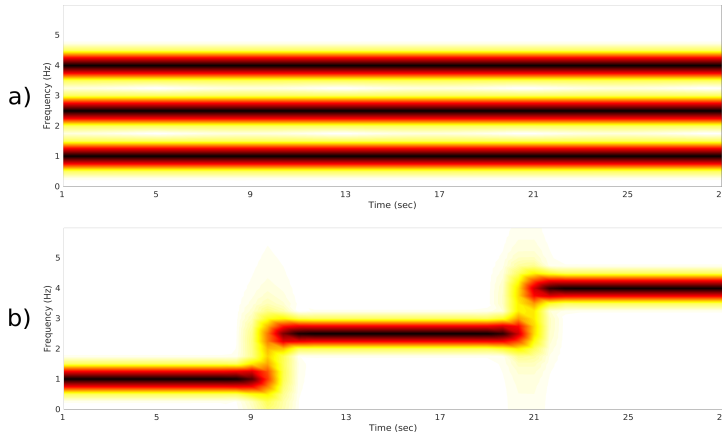


Figura 3: a) Transformada de Fourier con ventana  $g$  de la función  $f_1$  de la figura 1a). b) Transformada de Fourier con ventana  $g$  de la función  $f_2$  de la figura 1b). En ambos casos la función ventana  $g$  es una gaussiana con varianza 0.15. Los colores oscuros indican un valor absoluto mayor de la transformada.

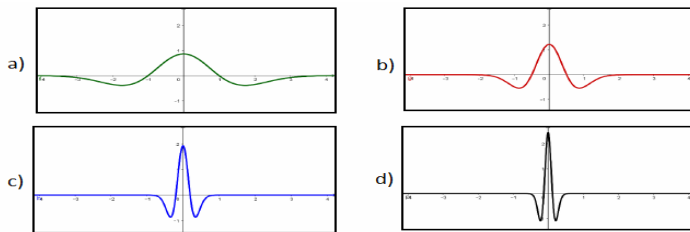


Figura 4: a) Función sombrero mejicano  $\psi(x) = \frac{2}{\sqrt{3}}\pi^{-1/4}(1-x^2)e^{-x^2/2}$ . b), c) y d) Función sombrero mejicano con dilataciones  $s = 2$ ,  $s = 5$ , y  $s = 8$  respectivamente.

Jean Morlet usó la gaussiana modulada  $\psi(x) = \pi^{-1/4}e^{-iw_0x}e^{-x^2/2}$  en sus trabajos en geofísica. El sombrero mejicano, dado por  $\psi(x) = \frac{2}{\sqrt{3}}\pi^{-1/4}(1-x^2)e^{-x^2/2}$ , es otro ejemplo; se representa en la figura 4, así como algunos de sus dilataos. Si se considera  $\psi$  de manera que tenga media cero, esto es  $\int_{-\infty}^{\infty} \psi(t)dt = 0$  y tal que  $\int_0^{\infty} \frac{|\mathcal{F}\psi(\xi)|^2}{\xi} d\xi = \int_0^{\infty} \frac{|\mathcal{F}\psi(-\xi)|^2}{\xi} d\xi := C_{\psi} < \infty$  (condición de admisibilidad de Calderón para funciones con valores complejos) la transformada continua de ondículas preserva la energía salvo por el factor constante  $C_{\psi}$ .

Una representación de  $|W_{\psi}(f_1)(t, \xi)|$  y  $|W_{\psi}(f_2)(t, \xi)|$  en un sistema de coordenadas tiempo-escala produce los resultados de la figura 5, a) y b). Los gráficos son suficientemente diferentes como para que se pueda distinguir la naturaleza de las señales originales.

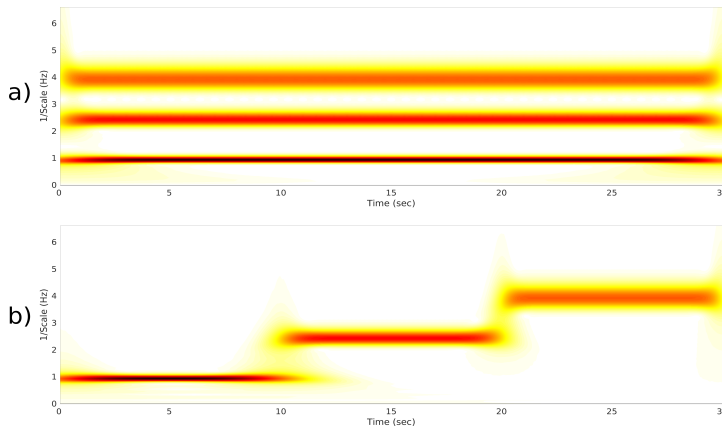


Figura 5: a) y b). Transformada continua de ondículas de las funciones  $f_1$  y  $f_2$ , respectivamente, de la Figura 1. En ambos casos se ha usado la ondícula de J. Morlet con  $w_0 = 4\pi$ . Los colores oscuros indican un valor absoluto mayor de la transformada.

### 3. DE LO CONTINUO A LO DISCRETO

Claude Shannon escribió en 1948 un informe ([35]) considerado como el germen de la teoría de la comunicación. Su propuesta de representar una señal usando algunas de sus muestras ha sido esencial en el desarrollo de la sociedad tecnológica actual. El Teorema 1 de [36] dice: *si una función  $f(t)$  no contiene frecuencias mayores que  $T/2$  queda completamente determinada por sus valores en una serie de puntos separados  $1/T$  segundos entre ellos*. El resultado matemático preciso que Shannon prueba en [36] (pero se remonta a los trabajos del matemático inglés E. T. Whittaker [40] en 1935 y a los del ingeniero ruso V. Kutel'nikov [22] en 1933) es:

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f\left(\frac{k}{T}\right) \frac{\text{sen } \pi(Tt - k)}{\pi(Tt - k)}. \quad (3)$$

Shannon imaginó un canal de una cierta anchura de banda  $W = T/2$ , comenzando en la frecuencia cero, y que el canal se podía usar por un periodo de tiempo  $T$ . Aunque no es posible tener una señal de anchura de banda finita que esté definida en un intervalo finito  $I$ , es posible tener la señal con anchura de banda limitada a  $W$  y que tome valores pequeños fuera del intervalo  $I$ . Para estas funciones  $T|I|$  muestras permiten determinar la señal  $f$  con bastante exactitud. Para hacer la demostración de la fórmula (3), expandir  $\mathcal{F}f$  en su serie de Fourier en el intervalo  $[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}]$  para obtener

$$\mathcal{F}f(\xi) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_{-k} e^{-2\pi i k \xi / T} \quad (4)$$

con  $c_{-k} = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \mathcal{F}f(\xi)e^{2\pi i k \xi/T} d\xi$ . Por la fórmula de inversión de Fourier se tiene  $c_{-k} = \frac{1}{T} \mathcal{F}^{-1} \mathcal{F}f\left(\frac{k}{T}\right) = \frac{1}{T} f\left(\frac{k}{T}\right)$ . Sustituyendo en (4) se obtiene

$$f(t) = \int_{-T/2}^{T/2} \mathcal{F}f(\xi)e^{2\pi i t \xi} d\xi = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{T} f\left(\frac{k}{T}\right) \int_{-T/2}^{T/2} e^{2\pi i \xi(t-\frac{k}{T})} d\xi,$$

y a partir de aquí se obtiene (3) calculando la última integral.

El análisis de una señal usando bases ortonormales es un tema crucial en el tratamiento de señales. Permite representar las señales mediante sus coeficientes en la base considerada y por tanto manipular estos números en un ordenador. Si se mira a la transformada de Fourier con ventana dada en (1), el núcleo puede discretizarse, por ejemplo, de la forma

$$\mathcal{G}(g) = \{g(t - k)e^{2\pi i \ell t} : k, \ell \in \mathbb{Z}\},$$

obteniéndose los llamados **sistemas de Gabor**<sup>2</sup>. El sistema es un conjunto de modulaciones bajo las traslaciones de la función  $g$  mediante enteros.

Cuando  $g(t) = \chi_{[0,1)}(t)$ , como  $g(t - k) = \chi_{[k,k+1)}(t)$  y  $\{e^{2\pi i \ell t}\}_{\ell \in \mathbb{Z}}$  es base ortonormal de  $L^2([k, k + 1))$  se tiene que el sistema de Gabor es una base ortonormal de  $L^2(\mathbb{R})$ . El Teorema de Balian-Low ([1], [25]) impone una restricción sobre las ventanas  $g$  que hacen que  $\mathcal{G}(g)$  sea un sistema ortonormal de  $L^2(\mathbb{R})$ , a saber,

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^2 |g(x)|^2 dx = \infty \quad \text{ó} \quad \int_{-\infty}^{\infty} \xi^2 |\mathcal{F}g(\xi)|^2 d\xi = \infty. \tag{5}$$

La ventana propuesta inicialmente por D. Gabor, que era la función Gaussiana  $g(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2}$ , no puede hacer que  $\mathcal{G}(g)$  sea una base ortonormal de  $L^2(\mathbb{R})$  porque las dos integrales que aparecen en (5) son finitas.

Para discretizar las transformada de ondículas continua dada en (2) se puede usar traslaciones enteras y dilataciones de la forma  $2^j, j \in \mathbb{Z}$ , obteniéndose la colección de funciones

$$W(\psi) = \{\psi_{j,k}(x) := 2^{j/2} \psi(2^j x - k) : j, k \in \mathbb{Z}\}, \tag{6}$$

y preguntarnos ahora, al igual que para los sistemas de Gabor, qué tipo de funciones hacen que  $W(\psi)$  sea una base ortonormal de  $L^2(\mathbb{R})$ . Si esto sucede decimos que  $\psi$  es una **ondícula ortonormal** de  $L^2(\mathbb{R})$ . Hay dos ejemplos sencillos. La función  $\psi = \chi_{[0,1/2)} - \chi_{[1/2,1)}$  es una de ellas, como probó esencialmente Alfred Haar ([19]) en 1910. La otra es la función  $\psi$  dada por  $\mathcal{F}\psi = \chi_{[-1,-1/2)} - \chi_{[1/2,1)}$ , relacionada con la fórmula de Shannon dada en (3). Ambos ejemplos satisfacen (5) con  $g$  reemplazada por  $\psi$ .

Fue Yves Meyer quién descubrió en 1985 que se podía hacer bases ortonormales de  $L^2(\mathbb{R})$  de la forma  $W(\psi)$  con  $g = \psi$  no cumpliendo (5). Escogió una función  $b$ , que

---

<sup>2</sup>Otras discretizaciones como  $\mathcal{G}_{a,b}(g) = \{g(t - ak)e^{2\pi i b \ell t} : k, \ell \in \mathbb{Z}\}, a, b > 0$  son posibles.

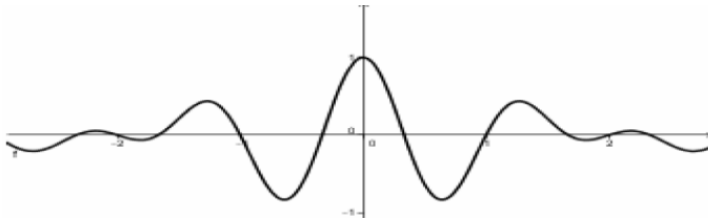


Figura 6: Ondícula de Shannon  $\psi$ , tal que  $\mathcal{F}\psi = \chi_{[-1, -1/2]} - \chi_{[1/2, 1]}$ .

puede tomarse de cualquier regularidad, y que debe satisfacer  $b(\xi)^2 + b(\xi - 1/2)^2 = 1$ . Entonces, la función  $\psi$  definida por  $\mathcal{F}\psi = b(\xi)e^{-\pi i\xi}$  produce una base ortonormal de  $L^2(\mathbb{R})$  (véase el teorema 4.5 y el corolario 4.7 en el capítulo 1 de [21]) y tanto  $\psi$  como  $\mathcal{F}\psi$  pueden ser funciones de la clase de Schwartz. El milagro de las bases de ondículas frecuentes había visto la luz.

#### 4. EL ANÁLISIS MULTIRRESOLUCIÓN

La luz que se encendió con las bases de ondículas creadas por Yves Meyer, siguió brillando con la formulación por parte de Stéphane Mallat e Yves Meyer ([26],[27]) del concepto de **Análisis Multirresolución** (AMR).

Un AMR para  $L^2(\mathbb{R})$  es un colección de subespacios lineales cerrados  $V_j, j \in \mathbb{Z}$ , de  $L^2(\mathbb{R})$  tales que

- (1)  $V_j \subset V_{j+1}$  para todo  $j \in \mathbb{Z}$ ;
- (2)  $f \in V_j$  si y solo si  $f(2\cdot) \in V_{j+1}$  para todo  $j \in \mathbb{Z}$ ;
- (3)  $\bigcap_{j \in \mathbb{Z}} V_j = \{0\}$ ;
- (4)  $\bigcup_{j \in \mathbb{Z}} V_j = L^2(\mathbb{R})$ ;
- (5) Existe una función, llamada *función de escala*,  $\varphi \in V_0$ , tal que  $\{\varphi(\cdot - k) : k \in \mathbb{Z}\}$  es una base ortonormal de  $V_0$ .

Una condición necesaria y suficiente para saber si  $\{\varphi(\cdot - k) : k \in \mathbb{Z}\}$  es una base ortonormal del espacio que genera es comprobar que se cumple la condición (véase [21], Capítulo 2, Proposition 1.1):

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} |\mathcal{F}\varphi(\xi + k)|^2 = 1, \quad \text{para casi todo } \xi \in \mathbb{R}. \quad (7)$$

La estructura de AMR permite hacer una descomposición ortogonal de  $L^2(\mathbb{R})$ . Si se denota por  $W_j$  el complemento ortogonal de  $V_j$  en  $V_{j+1}$  se tiene

$$V_{j+1} = V_j \oplus W_j = V_{j-1} \oplus W_{j-1} \oplus W_j = \cdots = \bigoplus_{\ell=-\infty}^j W_\ell$$

debido a (3) de la definición de AMR. Debido a (4) de AMR,

$$L^2(\mathbb{R}) = \overline{\bigcup_{j \in \mathbb{Z}} V_j} = \bigoplus_{j=-\infty}^{\infty} W_j. \quad (8)$$



Si se consigue encontrar una función  $\psi \in W_0$  tal que  $\{\psi(\cdot - k) : k \in \mathbb{Z}\}$  sea base ortonormal de  $W_0$ , la propiedad (2) de AMR permite comprobar que  $\{2^{j/2}\psi(2^j x - k) : k \in \mathbb{Z}\}$  es base ortonormal de  $W_j$ , por lo que (8) permite construir una ondícula ortonormal de  $L^2(\mathbb{R})$ .

Para obtener  $\psi$  es necesario usar la propiedad (5) de AMR. Como  $\frac{1}{2}\varphi(\frac{\cdot}{2}) \in V_{-1} \subset V_0$  y  $V_0$  está generado por  $\{\varphi(\cdot - k) : k \in \mathbb{Z}\}$  se puede escribir

$$\frac{1}{2}\varphi\left(\frac{t}{2}\right) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} h(k)\varphi(t - k) \quad \text{con} \quad \{h(k)\} \in \ell^2(\mathbb{Z}). \quad (9)$$

Tomando transformada de Fourier en ambos lados de (9) se obtiene

$$\mathcal{F}\varphi(2\xi) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} h(k)e^{-2\pi i k \xi} \mathcal{F}\varphi(\xi) := h(\xi)\mathcal{F}\varphi(\xi), \quad (10)$$

donde  $h$  es una función 1-periódica llamada **filtro de paso bajo** del MRA. Si hacemos la normalización  $\mathcal{F}\varphi(0) = 1$ , se ha de tener  $h(0) = 1$ . Usando (10) y (7) se prueba que el filtro de paso bajo satisface

$$|h(\xi)|^2 + |h(\xi + \frac{1}{2})|^2 = 1, \quad \text{para casi todo } \xi \in \mathbb{R}. \quad (11)$$

Ahora solo hace falta definir  $\psi$  de la forma

$$\mathcal{F}\psi(\xi) = g\left(\frac{\xi}{2}\right)\mathcal{F}\varphi\left(\frac{\xi}{2}\right) \quad \text{con} \quad g(\xi) = e^{-2\pi i \xi} \overline{h\left(\xi + \frac{1}{2}\right)} \quad (12)$$

para obtener una ondícula ortonormal de  $L^2(\mathbb{R})$ . Como ya observamos después de (8) bastaría probar que  $\{\psi(\cdot - k) : k \in \mathbb{Z}\}$  es una base ortonormal de  $W_0$ : esto puede verse, entre otras referencias, en [21], Capítulo 2, Proposición 2.13.

Hay dos situaciones sencillas que encajan perfectamente en la definición de AMR. Una de ellas es tomar

$$V_j = \left\{f \in L^2(\mathbb{R}) : f \text{ es constante en } \left[\frac{k}{2^j}, \frac{k+1}{2^j}\right), k \in \mathbb{Z}\right\}, \quad j \in \mathbb{Z},$$

con la función de escala  $\varphi = \chi_{[0,1]}$ . Este AMR da lugar a la ondícula de Haar. La otra es tomar

$$V_j = \left\{f \in L^2(\mathbb{R}) : \text{sup } \mathcal{F}f \subset \left[-\frac{2^j}{2}, \frac{2^j}{2}\right]\right\}, \quad j \in \mathbb{Z},$$

con la función de escala  $\varphi(x) = \frac{\text{sen } \pi x}{\pi x}$  si  $x \neq 0$  y  $\varphi(0) = 1$  (esto es  $\mathcal{F}\varphi = \chi_{[-1/2, 1/2]}$ ). Este AMR da lugar a la ondícula de Shannon, llamada así por ser  $\varphi$  la función que aparece en (3).

Las ondículas diseñadas inicialmente por Yves Meyer y las generalizaciones de Lemarié-Meyer también pueden obtenerse a partir de un AMR (ejemplo D en el Capítulo 2 de [21]), así como las ondículas de tipo spline desrolladas en [2].

## 5. ONDÍCULAS Y FILTROS

Como se ha explicado en la sección 4, a partir de un AMR con función de escala  $\varphi$  se fabrica un filtro de paso bajo  $h$  que se utiliza para crear una ondícula asociada al AMR siguiendo la receta de Stéphane Mallat dada en (12). En muchas ocasiones, puede comenzarse con un filtro de paso bajo y obtener un AMR.

Sea  $h$  una función periódica que satisface

$$h \in C^1(\mathbb{R}), \quad |h(\xi)|^2 + |h(\xi + \frac{1}{2})|^2 = 1 \quad \text{y} \quad h(0) = 1. \quad (13)$$

Para poder construir un AMR que tenga a  $h$  como filtro de paso bajo se necesita construir una función de escala  $\varphi$ . La relación (10) sugiere que esta función puede ser definida de la forma

$$\mathcal{F}\varphi(\xi) = \prod_{j=1}^{\infty} h\left(\frac{\xi}{2^j}\right), \quad (14)$$

donde el producto infinito converge para todo  $\xi \in \mathbb{R}$  porque  $|h(\xi/2^j)| \leq 1$  (véase (13)). La función  $\varphi$  definida en (14) es un elemento de  $L^2(\mathbb{R})$  y  $\|\varphi\|_2 \leq 1$ . La condición (13) no permite obtener  $\|\varphi\|_2 = 1$ , necesaria para poder tener una base ortonormal de  $V_0$ . La hipótesis adicional

$$h(\xi) \neq 0 \quad \text{para todo} \quad \xi \in [-1/4, 1/4], \quad (15)$$

hace que  $\|\varphi\|_2 = 1$ . A partir de aquí, y asumiendo que se cumplen (13) y (15), se define

$$V_j = \overline{\text{span}\{2^{j/2}\varphi(2^j \cdot -k) : k \in \mathbb{Z}\}}^{L^2(\mathbb{R})}, \quad j \in \mathbb{Z},$$

para obtener un AMR, por lo que se puede conseguir una ondícula ortonormal con la receta dada en (12).

Otro momento estelar del desarrollo de las ondículas se produjo cuando Ingrid Daubechies logró diseñar filtros de paso bajo satisfaciendo (13) y (15) que permitían producir ondículas de soporte compacto de cualquier suavidad finita prefijada. Hasta entonces la única ondícula conocida con soporte compacto era la ondícula de Haar, que puede obtenerse a partir del filtro

$$h(\xi) = \frac{1}{2}(1 + e^{-2\pi i \xi}). \quad (16)$$

Para poder obtener un función de escala  $\varphi$  que tenga soporte compacto, y por tanto una ondícula  $\psi$  que también lo tenga, el filtro de paso bajo debe ser un polinomio trigonométrico de la forma

$$h(\xi) = \sum_{N_1 \leq k \leq N_2} h(k) e^{-2\pi i k \xi}. \quad (17)$$

Así que si escribimos  $g(\xi) = |h(\xi)|^2$ , el polinomio trigonométrico  $g(\xi)$  debe satisfacer para  $\xi \in [-1/2, 1/2]$  las siguientes condiciones:

$$g(\xi) + g(\xi + 1/2) = 1, \quad g(0) = 1 \quad \text{y} \quad g(\xi) > 0 \quad \text{para} \quad \xi \in [-1/4, 1/4]. \quad (18)$$

Hay una derivación excelente de polinomios trigonométricos que satisfacen (18) en el libro de Ingrid Daubechies [12], así como en su artículo [10]. Pero para no complicar al lector con esta derivación, baste decir que para cada  $k = 0, 1, 2, \dots$ ,

$$g_k(\xi) = 1 - c_k \int_0^\xi (\text{sen } 2\pi x)^{2k+1} dx, \quad \text{con } c_k^{-1} = \int_0^{1/2} (\text{sen } 2\pi x)^{2k+1} dx \quad (19)$$

produce varios ejemplos, uno por cada valor de  $k$ .

Para obtener un polinomio trigonométrico  $h_k(\xi)$  tal que  $|h_k(\xi)|^2 = g_k(\xi)$  es necesario *extraer la raíz cuadrada* de  $g_k$ . Afortunadamente, un resultado clásico de L. Fejer ([14]) y F. Riesz ([34]) permite obtener  $h_k(\xi)$ . Escribamos  $g_k(\xi) = \sum_{j=-M}^{j=M} \gamma_j e^{-2\pi i j \xi} \geq 0$  para todo  $\xi \in \mathbb{R}$  con  $\gamma_{-M} \neq 0$ . Consideremos la función  $Q_k(z) = z^M \sum_{j=-M}^{j=M} \gamma_j z^j$ . Como  $\gamma_{-M} \neq 0$  se tiene que  $Q_k(0) = \gamma_{-M} \neq 0$ . Puede comprobarse que  $Q(z) = z^{2M} \overline{Q(1/\bar{z})}$ , por lo que si  $a_k \in \mathbb{R}^*$  es una solución no nula de  $Q(z) = 0$ , también lo es  $1/\bar{a}$ . Tomar  $a_1, \dots, a_M$ ,  $M$  soluciones de  $Q(z) = 0$  en  $\Delta = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}$ . (Obsérvese que el resto de soluciones de  $Q(z) = 0$ , que son  $1/\bar{a}_j, j = 1, \dots, M$ , están en  $\Delta' = \{z \in \mathbb{C} : |z| \geq 1\}$ ). El polinomio trigonométrico

$$h(\xi) = \sqrt{C_Q} \prod_{k=1}^M (e^{-2\pi i \xi} - \bar{a}_k)$$

es el buscado, para alguna constante  $C_Q$  que se determina a partir de  $Q_k$ . Para valores de  $k = 1, 2$  es fácil construir  $h$  *manualmente*, pero para valores mayores de  $k$  se ha de recurrir a la ayuda de un ordenador que permita el cálculo de ceros de  $Q(z)$ . El Capítulo 6 del libro [12] contiene tablas que indican los coeficientes de estos polinomios trigonométricos para distintos valores de  $k$ .

Estos polinomios trigonométricos producen ondículas con soporte compacto, como se describió al comienzo de esta sección. Cuanto mayor es el orden del polinomio trigonométrico  $h_k$  mayor es la suavidad de  $\psi_k$  medida por su pertenencia a un espacio  $C^\alpha$ . La regularidad de esta ondícula es del orden de  $\alpha \approx 0, 24k$  cuando  $k \rightarrow \infty$ .

## 6. LA TRANSFORMADA ORTOGONAL DE ONDÍCULAS

Para un AMR en  $L^2(\mathbb{R})$  dado por  $\{V_j : j \in \mathbb{Z}\}$  hemos escrito  $V_j = V_{j-1} \oplus W_{j-1}$ . El análisis de una señal  $f$  a resolución  $j \in \mathbb{Z}$  se hace calculando los coeficientes de la proyección ortogonal  $P_{V_j} f$  en la base ortonormal de  $V_j$  dada por  $\{\varphi_{j,k} : j, k \in \mathbb{Z}\}$  donde  $\varphi_{j,k}(t) = 2^{j/2} \varphi(2^j t - k)$ , esto es

$$P_{V_j} f = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_j(k) \varphi_{j,k}, \quad \text{con } c_j(k) = \langle f, \varphi_{j,k} \rangle. \quad (20)$$

De manera similar, puesto que  $\{\psi_{j-1,k} : j, k \in \mathbb{Z}\}$  es una base ortonormal de  $W_{j-1}$  se puede escribir

$$P_{W_{j-1}} f = \sum_{k \in \mathbb{Z}} d_{j-1}(k) \psi_{j,k}, \quad \text{con } d_{j-1}(k) = \langle f, \psi_{j-1,k} \rangle. \quad (21)$$

Puesto que  $P_{V_{j-1}} + P_{W_{j-1}} = P_{V_j}$ , los coeficientes  $d_{j-1}$  contienen los detalles que es necesario añadir a  $P_{V_{j-1}}$  para construir la mejor aproximación  $P_{V_j}$ .

A partir de los coeficientes  $\{c_j(k) : k \in \mathbb{Z}\}$  pueden calcularse los coeficientes  $\{c_{j-1}(k) : k \in \mathbb{Z}\}$  y  $\{d_{j-1}(k) : k \in \mathbb{Z}\}$  que representan la tendencia y los detalles de la señal  $f$  a resolución  $j - 1$ , haciendo uso de los coeficientes  $\{h(k) : k \in \mathbb{Z}\}$  y  $\{g(k) : k \in \mathbb{Z}\}$  de los filtros de paso bajo y alto respectivamente. El resultado (véase [21], [28], [12]) es

$$c_{j-1}(p) = \sqrt{2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \overline{h(k-2p)} c_j(k), \quad d_{j-1}(p) = \sqrt{2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \overline{g(k-2p)} c_j(k), \quad p \in \mathbb{Z}. \quad (22)$$

Obsérvese que debido a (12) se tiene  $g(k) = (-1)^{1-k} \overline{h(1-k)}$ , por lo que basta conocer los coeficientes del filtro de paso bajo para obtener los del filtro de paso alto.

Las fórmulas dadas en (22) tienen una interpretación matricial:

$$H \cdot \mathbf{c}_j := \sqrt{2} \begin{bmatrix} \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \cdots & \overline{h(0)} & \overline{h(1)} & \overline{h(2)} & \cdots \\ \cdots & \overline{h(-2)} & \overline{h(-1)} & \overline{h(0)} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vdots \\ c_j(0) \\ c_j(1) \\ c_j(2) \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vdots \\ c_{j-1}(0) \\ c_{j-1}(1) \\ c_{j-1}(2) \\ \vdots \end{bmatrix} = \mathbf{c}_{j-1}$$

$$G \cdot \mathbf{c}_j := \sqrt{2} \begin{bmatrix} \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \cdots & \overline{g(0)} & \overline{g(1)} & \overline{g(2)} & \cdots \\ \cdots & \overline{g(-2)} & \overline{g(-1)} & \overline{g(0)} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vdots \\ c_j(0) \\ c_j(1) \\ c_j(2) \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vdots \\ d_{j-1}(0) \\ d_{j-1}(1) \\ d_{j-1}(2) \\ \vdots \end{bmatrix} = \mathbf{d}_{j-1}.$$

Escribiendo  $W = \begin{bmatrix} H \\ G \end{bmatrix}$ , las fórmulas (22) se escriben como

$$W \cdot \mathbf{c}_j = \begin{bmatrix} H \\ G \end{bmatrix} \mathbf{c}_j = \begin{bmatrix} \mathbf{c}_{j-1} \\ \mathbf{d}_{j-1} \end{bmatrix}. \quad (23)$$

Lo maravilloso de la receta de Mallat y Meyer dada en (12) es que permite demostrar que  $W$  es una matriz ortogonal (hermítica si sus elementos son complejos). Se tiene,

$$WW^* = \begin{bmatrix} H \\ G \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H^* & | & G^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \overline{HH^*} & | & \overline{HG^*} \\ \overline{GH^*} & | & \overline{GG^*} \end{bmatrix}. \quad (24)$$

La condición  $|h(\xi)|^2 + |h(\xi + \frac{1}{2})|^2 = 1$  (véase (11)) permite obtener  $HH^* = I$ . Por la definición del filtro de paso alto dada en (12) también se tiene  $|g(\xi)|^2 + |g(\xi + \frac{1}{2})|^2 = 1$  y en consecuencia  $GG^* = I$ . Además, un sencillo cálculo produce  $h(\xi)\overline{g(\xi)} + h(\xi + \frac{1}{2})\overline{g(\xi + \frac{1}{2})} = 0$ , lo que lleva a  $HG^* = 0$  y  $GH^* = 0$ . Esto prueba  $WW^* = I$ .

La relación (23), o su equivalente (22), es la **transformada ortogonal de ondículas**: permite obtener las aproximaciones  $\mathbf{c}_{j-1}$  y los detalles  $\mathbf{d}_{j-1}$  de una señal a partir de su análisis  $\mathbf{c}_j$  a resolución  $j$ .

Por ser  $W$  hermítica, se tiene la ventaja de que el proceso puede fácilmente invertirse ya que  $W^{-1} = W^*$ . A partir de (23) se obtiene

$$\mathbf{c}_j = W^* \begin{bmatrix} \mathbf{c}_{j-1} \\ \mathbf{d}_{j-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H^* & | & G^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{c}_{j-1} \\ \mathbf{d}_{j-1} \end{bmatrix} = H^* \mathbf{c}_{j-1} + G^* \mathbf{d}_{j-1},$$

que permite recuperar la aproximación de la señal a resolución  $j$  conocidos su análisis y sus detalles al nivel  $j-1$ . La capacidad de las ondículas para comprimir imágenes se basa en que muchos de los detalles a resoluciones  $\ell < j$  son nulos o suficientemente pequeños para anularlos sin que afecte sustancialmente a la calidad de la imagen reconstruida.

## 7. DISEÑO DE FILTROS

El diseño de ondículas ortonormales con soporte compacto requiere usar filtros  $h(\xi)$  que sean polinomios trigonométricos, es decir con una cantidad finita de coeficientes  $\{h(k) : k \in \mathbb{Z}\}$  no nulos. Se puede usar (24) para diseñar filtros de longitud finita.

Comencemos con un filtro  $h(\xi) = h(0) + h(1)e^{-2\pi i\xi}$  de longitud 2, que escribimos también abreviadamente como  $\mathbf{h} = [h(0), h(1)]$ . Para que se cumpla (24) se ha de tener  $HH^* = I$ . En este caso,

$$2 \begin{bmatrix} \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \dots & \overline{h(0)} & \overline{h(1)} & 0 & 0 & \dots \\ \dots & 0 & 0 & \overline{h(0)} & \overline{h(1)} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \dots & h(0) & 0 & \dots \\ \dots & h(1) & 0 & \dots \\ \dots & 0 & h(0) & \dots \\ \dots & 0 & h(1) & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix} = I$$

produce

$$|h(0)|^2 + |h(1)|^2 = 1/2. \tag{25}$$

Esta ecuación tiene infinitas soluciones. Pero el filtro debe cumplir (13), por lo que  $h(1/2) = 0$ . Entonces,

$$h(0) - h(1) = 0. \tag{26}$$

Una posible solución real del sistema formado por las ecuaciones (25) y (26) es  $\mathbf{h} = [1/2, 1/2]$ , que da lugar a la ondícula de Haar (véase su filtro de paso bajo en (16)).

Supongamos que ahora queremos diseñar una ondícula ortonormal con un filtro de longitud 4 de la forma

$$h(\xi) = h(0) + h(1)e^{-2\pi i\xi} + h(2)e^{-2\pi i2\xi} + h(3)e^{-2\pi i3\xi},$$

que escribiremos  $\mathbf{h} = [h(0), h(1), h(2), h(3)]$ . La igualdad  $HH^* = I$  se traduce ahora en el par de ecuaciones

$$\left\{ \begin{array}{l} |h(0)|^2 + |h(1)|^2 + |h(2)|^2 + |h(3)|^2 = 1/2 \\ h(0)h(2) + h(1)h(3) = 0 \end{array} \right\} \quad (27)$$

Además, como  $h(1/2) = 0$ , debido a (13), se tiene

$$h(0) - h(1) + h(2) - h(3) = 0. \quad (28)$$

El sistema formado por las ecuaciones en (27) y (28) tiene infinitas soluciones reales. Ingrid Daubechies impuso la condición adicional de que  $h(\xi)$  debería tener un cero doble en  $\xi = 1/2$ , demostrando que esta condición se reflejaba en una mayor suavidad de la ondícula resultante. La condición  $h'(\xi) = 0$  se traduce en

$$h(1) - 2h(2) + 3h(3) = 0. \quad (29)$$

Una solución real del sistema formado por las ecuaciones (27), (28) y (29) es

$$h(0) = \frac{1 + \sqrt{3}}{8}, \quad h(1) = \frac{3 + \sqrt{3}}{8}, \quad h(2) = \frac{3 - \sqrt{3}}{8}, \quad h(3) = \frac{1 - \sqrt{3}}{8}.$$

Cálculos algebraicos similares a los que acabamos de hacer permiten obtener filtros de longitudes mayores para producir ondículas de soporte compacto con mayor suavidad. En [11], Ingrid Daubechies probó que si se elige  $\mathbf{h} = [h(0), h(1), \dots, h(L)]$ ,  $L$  impar, y se supone que  $h^{(m)}(1/2) = 0$ ,  $m = 0, 1, \dots, \frac{L-1}{2}$ , existen  $M = 2^{\lfloor \frac{L+2}{4} \rfloor}$  filtros de paso bajo con valores reales que producen ondículas ortonormales de  $L^2(\mathbb{R})$  con soporte compacto. La suavidad  $s(L)$  de estas ondículas crece al crecer  $L$  y se tiene  $\lim_{L \rightarrow \infty} s(L) = \infty$ .

Filtros finitos permiten reducir las multiplicaciones de (23) a un número finito de operaciones si los datos de la señal a resolución  $j$  también son finitos, generalmente una cantidad de la forma  $M = 2^\ell$ ,  $\ell \in \mathbb{N}$ .

## 8. DECAIMIENTO DE LOS COEFICIENTES DE ONDÍCULAS

Ingrid Daubechies mostró como construir ondículas con soporte compacto y con cualquier grado de suavidad como se explicó en las secciones 5 y 7. Al imponer que el filtro de paso bajo  $\mathbf{h}$  tuviera un cero de orden  $m$  en  $\xi = 1/2$  obtuvo ondículas con  $m$  momentos nulos. Estas ondículas son muy útiles en análisis numérico, en ingeniería y en tratamiento de imágenes porque los coeficientes de la descomposición con ondículas de una señal suave a trozos converge rápidamente a la señal.

Una posible formulación matemática es la siguiente. Sea  $\psi$  una ondícula ortonormal en  $L^2(\mathbb{R})$  con soporte compacto en  $[0, M]$  y tal que sus  $p$  primeros momentos sean nulos, esto es

$$\int_{\mathbb{R}} \psi(x) dx = \int_{\mathbb{R}} x\psi(x) dx = \dots = \int_{\mathbb{R}} x^{p-1}\psi(x) dx = 0. \quad (30)$$

Sean  $j, k \in \mathbb{Z}$  y supongamos que  $f \in C^s, s \geq p$ , en un entorno abierto de  $[k2^{-j}, (k + M)2^{-j}]$ . Entonces,

$$|\langle f, \psi_{j,k} \rangle| \leq C(p, \psi, f) 2^{-j(p+1/2)}. \tag{31}$$

La demostración de (31) se hace a continuación. Por el Teorema de Taylor,

$$f(x) = \sum_{n=0}^{p-1} \frac{f^{(n)}(k2^{-j})}{n!} (x - k2^{-j})^n + \frac{f^{(p)}(\xi_x)}{p!} (x - k2^{-j})^p,$$

donde  $\xi_x$  pertenece a  $[k2^{-j}, (k + M)2^{-j}]$ . Puesto que  $\text{sop } \psi_{j,k} \subset [k2^{-j}, (k + M)2^{-j}]$  se tiene

$$\langle f, \psi_{j,k} \rangle = \int_{k2^{-j}}^{(k+M)2^{-j}} \frac{f^{(p)}(\xi_x)}{p!} (x - k2^{-j})^p 2^{j/2} \overline{\psi(2^j x - k)} dx,$$

donde se ha usado la condición (30), que produce  $\int_{\mathbb{R}} q(x) \overline{\psi(x)} dx = 0$  para cualquier polinomio  $q$  de grado menor o igual que  $p - 1$ . Finalmente,

$$\begin{aligned} |\langle f, \psi_{j,k} \rangle| &\leq \frac{\|\psi\|_{\infty} 2^{j/2}}{p!} \sup_{x \in [k2^{-j}, (k+M)2^{-j}]} |f^{(p)}(x)| \int_{k2^{-j}}^{(k+M)2^{-j}} (x - k2^{-j})^p dx \\ &\leq C(p, \psi, f) \left(\frac{M}{2^j}\right)^{p+1} 2^{j/2} = C(p, \psi, f) 2^{-j(p+1/2)}, \end{aligned}$$

como se anunció en (31). El resultado que acabamos de probar muestra que en las regiones suaves de una señal los coeficientes de ondículas son pequeños. Por tanto, estos solo podrán ser grandes cuando  $\psi_{j,k}$  esté localizada cerca de sus singularidades. Son estos coeficientes los que nos permiten obtener una representación visualmente aceptable de la señal, aún cuando se hayan eliminado los coeficientes pequeños.

## 9. ONDÍCULAS PARA IMÁGENES

Una imagen puede representarse por una colección de números en los que cada uno de ellos representa las propiedades de un pequeño rectángulo, un *pixel*, dentro de la imagen. Para facilitar la notación supongamos que la imagen está confinada al cuadrado  $C = [0, 1) \times [0, 1)$ . Comenzamos dividiendo  $C$  en  $M \times N$  rectángulos iguales; es conveniente, y así lo supondremos, que  $M$  y  $N$  sean potencias de 2. La imagen queda dividida en los  $M \times N$  rectángulos

$$R_{i,j} = \left[\frac{i}{N}, \frac{i+1}{N}\right) \times \left[\frac{j}{M}, \frac{j+1}{M}\right), \quad i = 0, 1, \dots, N-1 \quad j = 1, \dots, M-1,$$

y a cada uno de ellos se le asignan tres números que representan la intensidad de cada uno de los colores primarios *Red*, *Green*, *Blue*<sup>3</sup>. Los cálculos hay que hacerlos con los tres colores primarios, pero basta mostrar como se hacen con uno de ellos ya que el resto se manipulan de la misma manera.

<sup>3</sup>Estamos usando el sistema RGB de representación digital de una imagen.

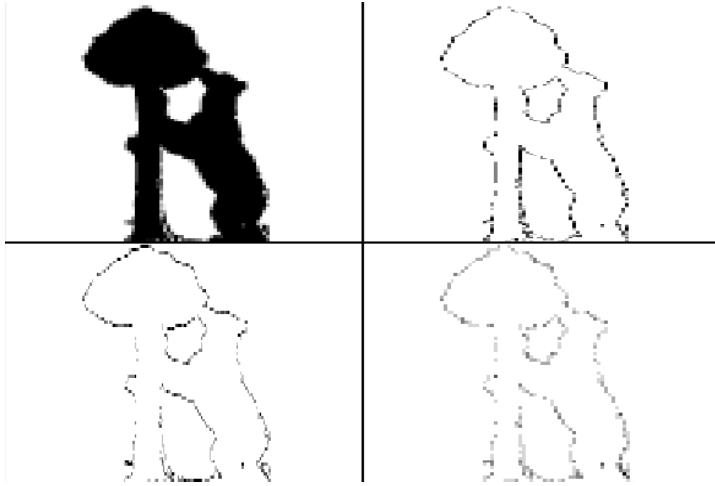


Figura 7: Parte superior izquierda: original. Parte superior derecha: detalles verticales. Parte inferior izquierda: detalles horizontales. Parte inferior derecha: detalles diagonales. Se ha usado la ondícula de Haar.

Así que sea  $A$  una matriz de tamaño  $M \times N$  que representa uno de los canales de colores de una imagen (la de la figura de la parte superior izquierda de la figura 7, por ejemplo, que está dada en blanco y negro). Sea  $W$  la transformada ortogonal de ondículas dada por (23). Se aplica  $W$  a las columnas de  $A$  (aumentada con ceros) para obtener  $WA$ . A continuación se aplica  $W$  a las filas de  $WA$  para obtener  $WAW^*$ .

La representación visual de este proceso, que se muestra en la figura 7, tiene una contrapartida matricial que es fácil obtener:

$$\begin{aligned} WAW^* &= \begin{bmatrix} \frac{H}{G} \end{bmatrix} A \begin{bmatrix} H^* & | & G^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{HA}{GA} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H^* & | & G^* \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{HAH^*}{GAH^*} & | & \frac{HAG^*}{GAG^*} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathcal{B} & | & \mathcal{V} \\ \mathcal{H} & | & \mathcal{D} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Las letras usadas en la última matriz indican que, con este procedimiento, se obtiene una imagen difuminada (blurred,  $\mathcal{B}$ ) de la original, así como los detalles horizontales ( $\mathcal{H}$ ), los verticales ( $\mathcal{V}$ ) y los diagonales ( $\mathcal{D}$ ). Este proceso puede continuarse con la imagen difuminada  $\mathcal{B}$  para obtener imágenes aun más difuminadas y más detalles. La descomposición de una imagen, así como su reconstrucción con la ondícula de Haar bidimensional se puede apreciar en la figura 8.

Como muchos de los detalles serán pequeños, una vez eliminados, la imagen puede representarse con menos números, pero la reconstrucción produce una imagen muy semejante a la original.

Se puede definir el concepto de AMR en  $L^2(\mathbb{R}^2)$  (e incluso en  $L^2(\mathbb{R}^d)$ ,  $d \geq 1$ ), pero no es efectivo para construir ondículas de soporte compacto que no se obtengan



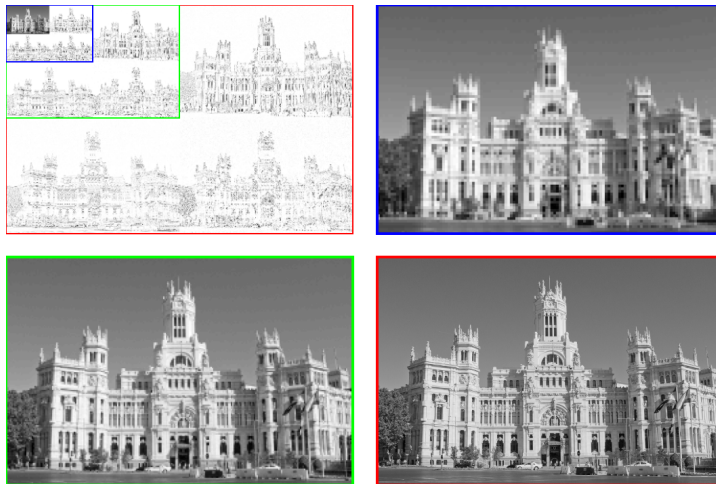


Figura 8: Descomposición y reconstrucción de una imagen de la fachada del Ayuntamiento de Madrid usando la ondícula de Haar bidimensional.

como producto tensorial de ondículas unidimensionales. El procedimiento descrito anteriormente es el que suele aplicarse a las imágenes cuando se quieren procesar con ondículas.

### 10. ONDÍCULAS BIORTOGONALES

Excepto la ondícula de Haar, ninguna de las ondículas ortonormales de soporte compacto diseñadas por Ingrid Daubechies son simétricas. Una forma de obtener ondículas y filtros simétricos fue diseñada por A. Cohen, I. Daubechies y J.C. Feauveau ([8]) introduciendo las ondículas biortogonales a partir de un par de AMR  $\{V_j : j \in \mathbb{Z}\}$  y  $\{\tilde{V}_j : j \in \mathbb{Z}\}$  de  $L^2(\mathbb{R})$  que son biortogonales, en el sentido de que si  $\varphi$  y  $\tilde{\varphi}$  son sus funciones de escala respectivamente,

$$\langle \varphi(\cdot - k), \tilde{\varphi}(\cdot - \ell) \rangle = \delta_{k,\ell}, \quad k, \ell \in \mathbb{Z}.$$

En este contexto puede hacerse un desarrollo similar al realizado para las ondículas ortonormales en la sección 4, obtener filtros de paso bajo  $h$  y  $\tilde{h}$ , y diseñar un par de funciones  $\psi$  and  $\tilde{\psi}$  que satisfacen

$$\langle \psi_{j_1, k_1}, \tilde{\psi}_{j_2, k_2} \rangle = \delta_{j_1, j_2} \delta_{k_1, k_2}, \quad j_1, j_2, k_1, k_2 \in \mathbb{Z}.$$

Es más fácil fijarse en la construcción matricial de la sección 6 y aplicarla a este caso. Queremos construir dos filtros finitos y simétricos  $h$  y  $\tilde{h}$  que produzcan transformaciones  $W$  y  $\tilde{W}$  y tal que  $\tilde{W}^{-1} = W^T$  <sup>4</sup>. Por tanto, debe cumplirse

$$\tilde{W}W^T = \begin{bmatrix} \tilde{H} \\ \tilde{G} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H^T & | & G^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{H}H^T & | & \tilde{H}G^T \\ \tilde{G}H^T & | & \tilde{G}G^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & | & 0 \\ 0 & | & I \end{bmatrix}. \quad (32)$$

<sup>4</sup>Nos limitamos a coeficientes reales

Sean  $h(\xi) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} h(k)e^{-2\pi i k \xi}$  y  $\tilde{h}(\xi) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \tilde{h}(k)e^{-2\pi i k \xi}$  las series de Fourier de cada uno de estos filtros. Como son filtros de paso bajo se debe tener  $h(0) = \tilde{h}(0) = 1$  y  $h(1/2) = \tilde{h}(1/2) = 0$ . Se prueba en [8] que  $\tilde{H}H^T = I$  si y solo si

$$\tilde{h}(\xi)\overline{h(\xi)} + \tilde{h}\left(\xi + \frac{1}{2}\right)\overline{h\left(\xi + \frac{1}{2}\right)} = 1.$$

Tomando

$$\tilde{g}(\xi) = e^{-2\pi i \xi} \overline{h\left(\xi + \frac{1}{2}\right)}, \quad \text{y} \quad g(\xi) = e^{-2\pi i \xi} \overline{\tilde{h}\left(\xi + \frac{1}{2}\right)},$$

se cumple (32).

Veamos un ejemplo sencillo. Comenzar con

$$\tilde{h}(\xi) = \frac{1}{4}(e^{2\pi i \xi} + 2 + e^{-2\pi i \xi}) = \frac{1}{2}(1 + \cos(2\pi \xi))$$

que se representa por  $\tilde{\mathbf{h}} = \frac{1}{4}[1, 2, 1]$  y que es un filtro simétrico de longitud 3. Se quiere hallar un filtro simétrico  $\mathbf{h} = [h(2), h(1), h(0), h(1), h(2)]$  para que se cumpla (32). Escrita con coeficientes,  $\tilde{H}H^T = I$  es equivalente a

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} \tilde{h}(k)\overline{h(k - 2\ell)} = \frac{1}{2}\delta_{0,\ell}, \quad \ell \in \mathbb{Z}. \quad (33)$$

En nuestro caso, la igualdad (33) junto con la condición  $h(1/2) = 0$  producen el sistema de ecuaciones

$$\left\{ \begin{array}{l} h(0) + h(1) = 1 \\ h(1) + 2h(2) = 0 \\ h(0) - 2h(1) + 2h(2) = 0 \end{array} \right\}$$

La solución de este sistema es  $h(0) = \frac{3}{4}$ ,  $h(1) = \frac{1}{4}$ ,  $h(2) = -\frac{1}{8}$ . Por tanto,

$$h(\xi) = -\frac{1}{8}e^{2\pi i 2\xi} + \frac{1}{4}e^{2\pi i \xi} + \frac{3}{4} + \frac{1}{4}e^{-2\pi i \xi} - \frac{1}{8}e^{-2\pi i 2\xi} = -\frac{1}{4}\cos(4\pi \xi) + \frac{1}{2}\cos(2\pi \xi) + \frac{3}{4}.$$

La pareja de filtros biortogonales que acabamos de obtener se denotan con el nombre de CDF(5,3). El algoritmo JPEG2000 usa una variante de la pareja de filtros biortogonales denominados CDF(9,5), con

$$\tilde{\mathbf{h}} = \frac{1}{64}[1, 6, 15, 20, 15, 6, 1]$$

y  $\mathbf{h}$  un filtro simétrico de longitud 9.

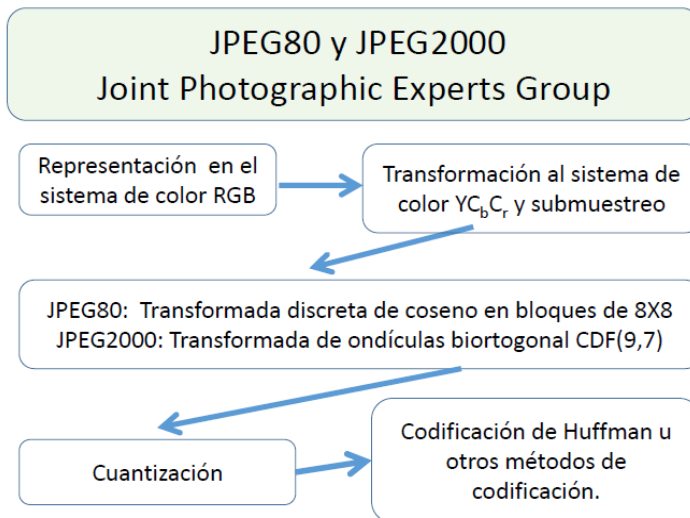


Figura 9: Esquema del algoritmo JPEG

## 11. EL PAPEL DE LAS ONDÍCULAS EN JPEG2000

JPEG (Joint Photographic Experts Group) es un algoritmo diseñado para comprimir imágenes, ya sean estas obtenidas con color, en tonos de grises o en blanco y negro. Se desarrolló esencialmente en la década 1980-1989 y el trabajo inicial se dio por concluido en 1992 con la publicación de los estándares (véase [33]). En esta primera versión de JPEG, usada en muchos dispositivos que comprimían imágenes a partir de 1992 y aun vigente en algunos de ellos, la imagen se procesaba en bloques de  $8 \times 8$  píxeles usando una base discreta de cosenos bidimensional.

A partir de 1997, el grupo de expertos comenzó a diseñar unos nuevos estándares para evitar las irregularidades que se obtenían en algunas imágenes comprimidas como consecuencia de dividir las imágenes en bloques de  $8 \times 8$  píxeles para su procesamiento, y en el que fuera posible, si se requería, comprimir una imagen sin pérdida de calidad, además de conseguir mayor compresión. El informe final se publicó en agosto del año 2000 y el algoritmo diseñado se conoce con el nombre de JPEG2000.

El estándar JPEG2000 es más flexible que el JPEG inicial y permite variaciones en su implementación según se requiera conseguir imágenes comprimidas de baja calidad (para móviles), mediana (para transmisión por Internet) o alta (para imágenes médicas). Esta posibilidad es debida al análisis multiresolución que los filtros de ondículas permiten.

Los algoritmos JPEG/JPEG2000 constan de varios pasos que se muestran en la figura 9. Cada pixel en una imagen en color se representa por tres números (R,G,B), cada uno de ellos entre 0 y  $255 = 2^8 - 1$ , indicando la intensidad de cada color primario (red, green, blue). Cada canal de color de un pixel es un número binario de 8 bits = 1 byte.

El primer paso del procesamiento consiste en hacer una transformación del color, del sistema RGB al sistema  $YC_bC_r$ , donde  $Y$  representa la luminosidad de cada pixel, y  $C_b, C_r$  la saturación de los colores azul y rojo en la imagen. Este cambio se hace con la transformación lineal invertible

$$\begin{bmatrix} Y \\ C_b \\ C_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,257 & 0,504 & 0,098 \\ -0,148 & -0,219 & 0,439 \\ 0,439 & -0,368 & -0,071 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R \\ G \\ B \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 16 \\ 128 \\ 128 \end{bmatrix}.$$

Debido a la calidad de los receptores oculares, el ojo humano es mas sensible a los cambios en la luminosidad de una imagen (componente  $Y$ ) que a la variación de saturación (componentes  $C_b$  y  $C_r$ ). El algoritmo JPEG saca partido de este hecho haciendo un muestreo 1:2 (se guarda la información de un pixel de cada 2) en las componentes  $C_b$  y  $C_r$ .

El paso siguiente es analizar la señal para obtener una representación que asigne valores grandes a la información relevante de la imagen y valores pequeños a los detalles. El algoritmo JPEG original, como ya se ha mencionado, usa una base discreta bidimensional de cosenos en cada bloque de  $8 \times 8$  píxeles. JPEG2000 recomienda usar una variante de los filtros biortogonales CDF(5,3) para la compresión sin pérdida de información, y una variante de los filtros biortogonales CDF(9,7) para la compresión con posible pérdida de calidad. El mecanismo para construir CDF(5,3) y CDF(9,7) se ha descrito en la sección 10.

El paso siguiente consiste en transformar los números reales que se obtienen del análisis con filtros biortogonales en números enteros. Este proceso se llama **cuantización** y consiste en asignar a cada número real  $y$  un número entero  $q$ . Una forma sencilla de cuantización se obtiene con la fórmula

$$q = \text{signo}(y) \left\lfloor \frac{|y|}{\Delta} \right\rfloor,$$

donde  $\Delta$  es el paso de la cuantización y  $\lfloor \cdot \rfloor$  denota la parte entera. Por ejemplo, para  $y = -17,32$  y  $\Delta = 10$ , se tiene  $q = -\left\lfloor \frac{17,32}{10} \right\rfloor = -1$ . Obsérvese que si  $|y| < \Delta$ , se tiene  $q = 0$ , por lo que todos los valores que en valor absoluto sean menores que  $\Delta$  se cuantizan a cero.

En el último paso, los valores obtenidos después de la cuantización se codifican con un código de Huffman ([20]) (o alguna de sus variantes) asignando a los valores más frecuentes una representación binaria con menor número de bits.

El proceso de recuperar la señal sigue los pasos anteriores en sentido inverso. La ordenación de la información en diferente resoluciones que permiten las ondículas, hace que cada diseñador pueda implementar el algoritmo inverso para obtener las imágenes con la resolución adecuada para sus necesidades. El lector puede encontrar información detallada sobre estos algoritmos en [37] y [38].

## 12. ONDÍCULAS EN VARIAS DIMENSIONES

El concepto de ondícula dado en (6) se extiende a  $L^2(\mathbb{R}^d)$ ,  $d > 1$ . Las traslaciones por  $\mathbb{Z}$  se sustituyen por traslaciones de  $\mathbb{Z}^d$  y el conjunto de dilataciones  $\{2^j : j \in \mathbb{Z}\}$

se cambia por  $\{A^j : j \in \mathbb{Z}\}$  donde  $A$  es una matriz real de tamaño  $d \times d$  expansiva (es decir, con autovalores de módulo mayor que 1). La colección finita de funciones  $\Psi = \{\psi^1, \dots, \psi^L\} \subset L^2(\mathbb{R}^d)$  se dice que es un **sistema de ondículas ortonormales** de  $L^2(\mathbb{R}^d)$  si el conjunto

$$\{\psi_{j,k}^\ell(x) = |\det(A)|^{j/2} \psi^\ell(A^j x - k) : j \in \mathbb{Z}, k \in \mathbb{Z}^d, \ell = 1, 0 \dots, L\}$$

es una base ortonormal de  $L^2(\mathbb{R}^d)$ .

La definición de AMR que se dió en la sección 4 puede extenderse a  $L^2(\mathbb{R}^d)$ . Cuando  $A = \text{diag}(2)$ , puede construirse un AMR de  $L^2(\mathbb{R}^d)$  a partir de un AMR de  $L^2(\mathbb{R})$ . Por ejemplo, si  $d = 2$  y tenemos que  $(\{V_j; j \in \mathbb{Z}\}, \varphi)$  es un AMR de  $L^2(\mathbb{R})$  que genera una ondícula ortonormal  $\psi$ , el producto tensorial de ambos produce un AMR de  $L^2(\mathbb{R}^2)$  que genera un sistema de tres ondículas ortonormales, a saber,

$$\psi^1(x, y) = \varphi(x)\psi(y), \quad \psi^2(x, y) = \psi(x)\varphi(y), \quad \psi^3(x, y) = \psi(x)\psi(y). \quad (34)$$

Este es el tipo de ondículas descritas en la sección 9 para procesar imágenes: se procesan las filas y las columnas por separado.

Las ondículas separables, como las descritas en (34), no permiten detectar de manera eficiente las singularidades de una imagen a lo largo de curvas continuas de dirección variable. Se han propuesto varias construcciones para solventar esta dificultad. De ellas citamos las **wedgelets** ([13]), las **ridgelets** ([5]) y las **curvelets** ([6]).

Una de las construcciones más eficientes para tratar imágenes con un número finito de singularidades a lo largo de curvas continuas son las **shearlets**. Estas están relacionadas con las **ondículas con dilataciones compuestas** introducidas en [17]. Además de traslaciones por  $\mathbb{Z}^d$  y dilataciones por  $A^j, j \in \mathbb{Z}$ , donde  $A$  es una matriz de tamaño  $d \times d$  expansiva, se elije un grupo de matrices  $\mathcal{G}$  cuyos elementos tengan todos determinante 1 en valor absoluto. La colección finita de funciones  $\Psi = \{\psi^1, \dots, \psi^L\} \subset L^2(\mathbb{R}^d)$  se dice que es un **sistema de ondículas ortonormales compuesto** de  $L^2(\mathbb{R}^d)$  si el conjunto

$$\{\psi_{B,j,k}^\ell(x) = |\det(A)|^{j/2} \psi^\ell(BA^j x - k) : B \in \mathcal{G}, j \in \mathbb{Z}, k \in \mathbb{Z}^d, \ell = 1, \dots, L\} \quad (35)$$

es una base ortonormal de  $L^2(\mathbb{R}^d)$ . Por ejemplo,  $\mathcal{G}$  podría ser el grupo de las rotaciones de un polígono regular de  $n$  lados ( $n \geq 3$ ), lo que permitiría analizar singularidades de una función definida en un subconjunto de  $L^2(\mathbb{R}^2)$  a lo largo de  $n$  direcciones equidistribuidas.

Las **shearlets** son un caso particular de (35). Se definen en  $\mathbb{R}^2$  tomando  $L = 1$ ,  $A = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ ,  $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$  y  $\mathcal{G} = \{B^\ell : \ell \in \mathbb{Z}\}$ . Las potencias enteras de la matriz  $A$  producen dilataciones de tipo parabólico. Las potencias enteras de  $B$  controlan las orientaciones de los elementos del sistema de shearlets.

La función  $\psi$  que genera este sistema se define en el lado de las frecuencias como

$$\mathcal{F}\psi(\xi) = \mathcal{F}\psi(\xi_1, \xi_2) = w(\xi_1)v\left(\frac{\xi_2}{\xi_1}\right), \quad (36)$$

donde  $w, v \in C^\infty(\mathbb{R})$ ,  $\text{sop } w \subset [-1/2, 1/2] \setminus [-1/16, 1/16]$  y  $\text{sop } v \subset [-1, 1]$ . El sistema de shearlets es el conjunto

$$\mathcal{S}_{A,B}(\psi) = \{\psi_{\ell,j,k}(x) = 2^{3j/2}\psi(B^\ell A^j x - k) : \ell, j \in \mathbb{Z}, k \in \mathbb{Z}^2\} \quad (37)$$

en  $L^2(\mathbb{R}^2)$ . Es posible elegir las funciones  $w$  y  $v$  en (36) para que  $\mathcal{S}_{A,B}(\psi)$  dado en (37) sea un **marco de Parseval** ([18]), esto es, para toda  $f \in L^2(\mathbb{R}^2)$ ,

$$\sum_{\ell \in \mathbb{Z}} \sum_{j \in \mathbb{Z}} \sum_{k \in \mathbb{Z}^2} |\langle f, \psi_{\ell,j,k} \rangle|^2 = \|f\|_2^2. \quad (38)$$

La igualdad (38) no implica que  $\mathcal{S}_{A,B}(\psi)$  sea un sistema ortogonal, pero es equivalente a que  $\mathcal{S}_{A,B}(\psi)$  en (37) sea un sistema reproductor (véase Capítulo 7, Teorema 1.7 en [21]), es decir, para toda  $f \in L^2(\mathbb{R}^2)$ ,

$$f = \sum_{\ell \in \mathbb{Z}} \sum_{j \in \mathbb{Z}} \sum_{k \in \mathbb{Z}^2} \langle f, \psi_{\ell,j,k} \rangle \psi_{\ell,j,k},$$

que es lo que se necesita para digitalizar la señal  $f$ .

La orientabilidad de las shearlets está controlada por el parámetro  $\ell$ , permitiendo mejores aproximación de imágenes que sean continuas excepto en un número finito de discontinuidades sobre curvas continuas ([18]).

### 13. EPÍLOGO

Aunque una base ortonormal de  $L^2(\mathbb{R})$  formada con dilatados de la función  $\psi = \chi_{[0,1/2)} - \chi_{[1/2,1)}$  había sido considerada por A. Haar en 1910, la moderna teoría de ondículas debe su nacimiento a las ideas de J. Morlet, A. Grossmann y sus colaboradores entre 1982 y 1984, y su base teórica a los trabajos de Y. Meyer, S. Mallat e I. Daubechies entre 1985 y 1989. Su versatilidad para seleccionar las características principales de una señal o imagen han hecho posible que se usen en numerosas aplicaciones relacionadas con el procesamiento de imágenes. En particular destacamos su utilización en el algoritmo JPEG2000 de compresión de imágenes.

**Agradecimientos.** Los gráficos de las figuras 1, 2, 3, 5, 7 y 8 han sido realizados por Davide Barbieri (Universidad Autónoma de Madrid) con Matlab (®). Los gráficos de las figuras 4 y 6 se ha realizado con Geogebra (®).

### REFERENCIAS

- [1] R. BALIAN, Un principe d'incertitude fort in théorie du signal ou en mécanique quantique, *C. R. Acad. Sci. Paris*, **292**, Sér. II, (1981), 1357–1361.
- [2] G. BATTLE, A block spline construction of ondeletes; Part I: Lemarie functions, *Comm. Math. Phys.*, **110**, (1987), 601–605.
- [3] B. BURKE HUBBARD, *The world according to wavelets. The story of a mathematical technique in the making*, A K Peters, 1996.

- [4] P. BURT Y E. ADELSON, The Laplacian pyramid as a compact image code, *IEES Trans. Comm.*, **31**, (1983), 482–540.
- [5] E. J. CANDÈS Y D. L. DONOHO, Ridgelets: The key to high dimensional intermittency?, *Philos. Trans. Roy. Soc. Lond. Ser. A*, **357** (1999), 2495–2509.
- [6] E. J. CANDÈS Y D. L. DONOHO, New tight frames of curvelets and optimal representations of objects with  $C^2$  singularities, *Comm. Pure Appl. Math.*, **57** (2004), 219–266.
- [7] C. K. CHUI, *An Introduction to Wavelets*, Academic Press, 1992.
- [8] A. COHEN, I. DAUBECHIES Y J. C. FEAUVEAU, Biorthogonal wavelet bases of compactly supported wavelets, *Comm. Pure Appl. Math.* **45** (1992), 485–560.
- [9] R. COIFMAN, Y. MEYER Y M. V. WICKERHAUSER, Size properties of wavelet-packets, in *Wavelets and their Applications* (Ruskai, M.B. et al., Eds.), Jones and Bartlett, 1992.
- [10] I. DAUBECHIES, Orthonormal bases of compactly supported wavelets, *Comm. Pure Appl. Math.* **41**, (1988), 909–996.
- [11] I. DAUBECHIES, Orthonormal bases of compactly supported wavelets:II, Variations on a theme, *SIAM J. Math. Anal.* **24** (2), (1993), 499–519.
- [12] I. DAUBECHIES, *Ten Lectures on Wavelets*, CBS-NSF Regional Conferences in Applied Mathematics, 61, SIAM, 1992.
- [13] D. L. DONOHO, Wedgelets: Nearly-minimax estimation of edges, *Ann. Statist.*, **27** (1999), 859–897.
- [14] L. FEJÉR, Über trigonometrische polynome, *J. Reine Angew. Math.*, **146** (1916), 53–82
- [15] P. GOUPILLAUD, A. GROSSMANN Y J. MORLET, Cycle-octave and related transforms in seismic signal analysis, *Geoexploration*, **23** (1984), 85–102.
- [16] A. GROSSMANN Y J. MORLET, Decomposition of Hardy functions into square integrable wavelets of constant shape, *SIAM J. Math. Anal.* **15**(4) (1984), 723–736.
- [17] K. GUO, W-Q. LIM, D. LABATE, G. WEISS Y E. WILSON, Wavelets with composite dilations and their MRA properties, *Appl. Comput. Harmon. Anal.* **20** (2006), 231–249.
- [18] K. GUO Y D. LABATE, Optimally sparse multidimensional representation using shearlets, *SIAM J. Math. Anal.*, 9 (2007), 298–318
- [19] A. HAAR, Zur theorie der orthogonalen funktionen systems, *Math. Ann.*, **69** (1910), 331–371.
- [20] D. A. HUFFMAN, A method for the construction of minimum-redundacy codes, *Proceedings of the I.R.E.*, **40** (9) (1952), 1098–1102.
- [21] E. HERNÁNDEZ Y G. WEISS, *A first course on wavelets*, Studies in Advanced Mathematics, CRC Press, Boca Raton, FL, 1996.
- [22] V. KUTEL’NIKOV, On the carrying capacity of the “ether” and wire in telecommunications, material for the first All-Union Conference on Questions of Communications, *Izd. Red. Upr. Svyazi RSKA*, Moscú, Rusia, 1933

- [23] G. KUTYNIOK Y D. LABATE (EDITORES), *Shearlets: Multiscale analysis for multivariate data*, Applied and Numerical Harmonic Analysis, Birkhäuser, 2012.
- [24] P. G. LEMARIÉ E Y. MEYER, Ondelettes et bases hilbertiennes, *Rev. Mat. Iberoamericana* **2(1-2)** (1986), 1–18.
- [25] F. LOW, Complete sets of wave packets, *A passion for Physics - Essays in honor of Geoffrey Chow*, World Scientific, Singapore 1985, 17–22.
- [26] S. MALLAT, Multiresolution approximations and wavelet orthonormal bases for  $L^2(\mathbb{R})$ , *Trans. Amer. Math. Soc.*, **315** (1989), 69–87.
- [27] S. MALLAT, A theory of multiresolution signal decomposition: the wavelet representation, *IEEE Trans. Pattern Anal. Machine Intell.*, **11** (1989), 674–693.
- [28] S. MALLAT, *A wavelet tour of signal processing*, Second Edition, Academic Press, 1998.
- [29] Y. MEYER, Principe d’incertitude, bases hilbertiennes et algèbres d’opérateurs, *Séminaire Bourbaki, Société Mathématique de France* **28** (1985–86), 209–223.
- [30] Y. MEYER, *Ondelettes et opérateurs. I: Ondelettes*, Hermann, Paris, 1990. [English translation: *Wavelets and operators*, Cambridge University Press, 1992.]
- [31] J. MORLET, G. ARENS, E. FOURGEAU Y D. GIARD, Wave propagation and sampling theory - part 1: complex signals and scattering in multilayered media, *Geophysics* **47(2)** (1982), 203–221.
- [32] J. MORLET, G. ARENS, E. FOURGEAU Y D. GIARD, Wave propagation and sampling theory - part 2: sampling theory and complex waves, *Geophysics* **47(2)** (1982), 222–236.
- [33] W. B. PENNEBAKER Y J. L. MITCHELL, *JPEG: Still image data compression standard*, Van Nostrand Reinhold, New York, 1993.
- [34] F. RIESZ, Über ein problem des Herrn Carathéodory, *J. Reine Angew. Math.*, **146** (1916), 83–87.
- [35] C. SHANNON, A mathematical theory of communication, *The Bell system Technical Journal* **27** (1948), 379–423.
- [36] C. SHANNON, Communication in the presence of noise, *Proceedings of the I.R.E* **37** (1949), 10–21.
- [37] D. TAUBMAN Y M. MARCELLIN (EDITORES), *JPEG2000 Compression Fundamentals, Standard and Practice*, Springer, 2002.
- [38] D. TAUBMAN Y M. MARCELLIN, JPEG2000: Standards for interactive imaging, *Proceedings of the I.E.E.E* **90 (8)** (2001), 1336–2002.
- [39] P. J. VAN FLEET, *Discrete wavelet transformation. An elementary approach with applications*, John Wiley and Sons, Inc., 2008.
- [40] E. T. WHITTAKER, On the functions which are represented by the expansions of interpolation theory, *Proc. Roy. Soc. Edinburgh* **35** (1915), 181–194.