LA ELECCIÓN SOCIAL: EL SUEÑO IMPOSIBLE

Eugenio Hernández
Matemáticas
Universidad Autónoma de Madrid
Marzo 2003

Las votaciones sirven para que un grupo pueda tomar una decisión teniendo en cuenta las decisiones, a veces dispares, de cada uno de sus miembros. Generalmente, tratan de elegir colectivamente entre varias alternativas. Cada uno de los votantes es capaz de ordenar las alternativas según su preferencia. Los métodos de votación tratan de ordenar las alternativas según la preferencia del grupo.

El sueño de las sociedades democráticas es encontrar métodos adecuados para tomar decisiones colectivas. Aunque es controvertido decidir qué significa *métodos adecuados*, nuestro punto de vista en estas líneas es que un método es adecuado si respeta ciertas reglas elementales que se desvelarán en el curso de la exposición.

Cuando solamente hay dos alternativas un *método adecuado* para tomar decision colectivas es el de la mayoría absoluta; también son adecuados los métodos de la cuota, con cuota superior a la mitad de los votantes. **Para tres o más alternativas Kenneth Arrow probó en 1950 que no hay ningún método que satisfaga las reglas elementales de decisión colectiva.** Nuestro objetivo es presentar una descripción de este teorema de *imposibilidad* de K. Arrow y su demostración.

LA PARADOJA DE LA VOTACIÓN

A juzgar por la literatura escrita, la paradoja de la votación ha sido una fuente de gran controversia en las ciencias sociales. Fue descubierta en el siglo XVIII por el Marqués de Condorcet y quedó olvidada hasta el trabajo de Kenneth Arrow en 1950. Al igual que algunos de los más famosos problemas de matemáticas, esta paradoja puede ser explicada de manera sencilla , e ilustra los problemas que pueden surgir al tratar de elegir un método que refleje la elección de un colectivo.

El marco general para una elección social es el siguiente. Habrá un conjunto A cuyos elementos son las **alternativas** o **candidatos**, y que los escribiremos con las letras a, b, c, ...También habrá un conjunto P que estará formado por **personas** o **votantes,** los cuales serán designados con las letras p_1, p_2, p_3, ...

Supondremos que todas la personas de P son capaces de ordenar las alternativas en una lista, según sus preferencias. Esta ordenación se colocará en una columna, poniendo las alternativas preferidas arriba y las menos preferidas al final de la columna. Nuestro interés sería encontrar un **procedimiento de elección social** o **votación** que permita elegir una alternativa teniendo en cuenta las preferencias de los individuos.

PROPIEDADES DE LAS DECISIONES INDIVIDUALES

Ordenación total: para cualesquiera dos alternativas **a** y **b** todo votante puede decidir si prefiere **a** sobre **b** (**a**>**b**) o prefiere **b** sobre **a** (**b**>**a**).

Transitividad: Si un votante prefiere la alternativa **a** sobre la **b** (**a**>**b**) y la **b** sobre la **c** (**b**>**c**), entonces también prefiere la **a** sobre la **c** (**a**>**c**).

Universalidad de las preferencias: Todas las posibles ordenaciones de las alternativas por parte de los votantes son admisibles. Es decir, ninguna institución o partido político puede restringir las ordenaciones de manera que algunas escalas de preferencias no sean admisibles.

PROPIEDADES DESEABLES
DE UN PROCEDIMIENTO DE ELECCIÓN SOCIAL

Condición de Pareto: si todos los votantes prefieren la alternativa **x** sobre la **y**, entonces **x**>**y** en la lista de preferencias del grupo.

Monotonía: Si un método produce **x**>**y** en la lista de preferencias del grupo y un votante que tiene **y**>**x** cambia su preferencia a **x**>**y**, el método de elección social debe seguir produciendo **x**>**y** en la lista de preferencias del grupo.

Independencia de las alternativas irrelevantes (IAI): Un método de elección social satisface **IAI** si consideradas dos alternativas **x** e **y** para las cuales el método produce **x**>**y**, cuando los votantes cambian sus preferencias con respecto a otras alternativas que no sean **x** e **y**, el método continua produciendo **x**>**y**. Por tanto, la posición de las alternativas que **no sean x** e **y** en las listas de preferencias de los individuos es *irrelevante* para decidir la ordenación de **x** e **y** en la lista de preferencias del grupo.

TABLA 1	PARETO	MONOTONÍA	IAI
MAYORÍA SIMPLE	SI	SI	NO
SEGUNDA VUELTA	SI	SI	NO
ELIMINACIÓN DEL PERDEDOR	SI	NO	NO
RECUENTO BORDA	SI	SI	NO
DICTADURA	SI	SI	SI

En la tabla anterior los SI son fáciles de comprender. Para entender el NO de los rectángulos hay que trabajar los siguientes ejercicios.

El método de eliminación del perdedor no es monótono.

	Número de votantes			
Preferencia	7	5	4	1
1ª	a	c	b	b
2ª	b	a	c	c
3ª	c	b	a	a

a) Encuentra la lista de preferencias de los 17 votantes con el método de Hare o de eliminación del perdedor.
b) Cambia la lista de preferencias del último votante a **a** > **b** > **c .** ¿Cuál es ahora la lista de preferencias del grupo con el mismo método?

El método de la mayoría simple no satisface IAI.

	Votantes				
Preferencia	A	B	C	D	E
1ª	a	a	b	c	d
2ª	b	b	c	b	c
3ª	c	c	a	a	b
4ª	d	d	d	d	a

a) Encuentra la lista de preferencias de estos 5 votantes con el método de la mayoría simple.
b) Cambia la lista de preferencias del votante **E** a **c** > **b** > **a** > **d .** ¿Cuál es ahora la lista de preferencias del grupo con el mismo método?

El método de eliminación del perdedor no satisface IAI.

	Votantes				
Preferencia	A	B	C	D	E
1ª	a	a	b	c	d
2ª	b	b	c	b	c
3ª	c	c	a	a	b
4ª	d	d	d	d	a

a) Encuentra la lista de preferencias de estos 5 votantes con el método de eliminación del perdedor.
b) Cambia la lista de preferencias del votante **E** a **c** > **b** > **a** > **d .** ¿Cuál es ahora la lista de preferencias del grupo con el mismo método?

El recuento Borda no satisface IAI.

		Votante	
Puntos	Preferencia	3	2
2	1ª	a	c
1	2ª	b	b
0	3ª	c	a

a) Encuentra la lista de preferencias de los 5 votantes con el recuento Borda.
b) Cambia la lista de preferencias de los dos últimos votantes a **b** > **c** > **a .** ¿Cuál es ahora la lista de preferencias del grupo con el mismo método?

El método de la segunda vuelta no satisface IAI.

	Votantes				
Preferencia	A	B	C	D	E
1ª	a	a	b	b	c
2ª	b	b	c	a	b
3ª	c	c	a	c	a

a) Encuentra la lista de preferencias de estos 5 votantes con el método de la segunda vuelta.
b) Cambia la lista de preferencias del votante **C** a **c** > **b** > **a .** ¿Cuál es ahora la lista de preferencias del grupo con el mismo método?

Teorema de Arrow

Si hay al menos 3 alternativas en A y el conjunto de personas P es finito, el único método de elección social para A y P que satisface la condición de Pareto, es monótono y satisface IAI es la dictadura.

Kenneth Arrow, “A difficulty in the concept of social welfare” Journal of Political Economy, 1950

La demostración del Teorema de Arrow requiere varias proposiciones y lemas.

Proposición 1. *Si A tiene al menos 3 alternativas, cualquier método de elección social para A que satisfaga la condición de Pareto e IAI nunca producirá empates en la lista de preferencias del grupo.*

Demostración. Supongamos, para hacer la demostración por contradicción, que hay dos alternativas, **a** y **b**, que están empatadas en la lista de preferencias del grupo con el método de elección social escogido.

Sea **c** una alternativa diferente de **a** y de **b.** Sea X un conjunto de personas que tienen **a > b** en la lista de preferencias individuales y sea Y el resto de votantes, para los que **b > a.** Insertamos **c** entre **a** y **b** en las listas de las personas en X y ponemos **c** por delante de **a** y **b** en las listas de las personas de Y. Obtendremos que **a** sigue empatado con **b** debido a IAI y **c > b** debido a la condición de Pareto, ya que **c > b** en todas las listas individuales. Tenemos

<table>
<tr><td>X</td><td>Y</td><td rowspan="7">⇒</td><td rowspan="7">c > b = a</td></tr>
<tr><td>.............</td><td>............</td></tr>
<tr><td>a</td><td>c</td></tr>
<tr><td>...............</td><td>............</td></tr>
<tr><td>c</td><td>a</td></tr>
<tr><td>...............</td><td>............</td></tr>
<tr><td>b</td><td>b</td></tr>
</table>

Usando IAI concluimos que si **a > c** en X y **c > a** en Y, **c > a** en la lista de preferencias del grupo ya que el resultado es independiente de **b.**

Ponemos ahora **c** debajo de **a** y **b** en las listas de los miembros de X e insertamos **c** entre **a** y **b** en las listas de las personas de Y:

X	Y
....	....
a	a
....	....
b	c
....	....
c	b

Como **b** está delante de **c** en las preferencias de todos los votantes, usando IAI y Pareto se obtiene **a = b > c.** Usando IAI concluimos que si **a > c** en X y **c > a** en Y, **a > c** en la lista de preferencias del grupo ya que el resultado es independiente de la posición de **b.**

Este resultado es el opuesto del anterior, lo que prueba que no pueden existir empates en la lista de preferencias del grupo.

Para presentar la demostración del Teorema de Arrow necesitamos dos definiciones:

Definición 1. *Sea X un conjunto de personas y a y b dos alternativas distintas. Diremos que* ***X fuerza a sobre b (X fuerza a > b)*** *si cuando a > b en las listas de preferencias de todos los votantes de X, también a > b en la lista de preferencias del grupo obtenida con este método.*

Intuitivamente: El conjunto de personas de X tiene el poder para forzar la preferencia de la alternativa a sobre la b.

Definición 2. *Un conjunto de personas X es un* ***conjunto dictador*** *si X fuerza* $x > y$ *para cualquier par de alternativas x e y distintas.*

Intuitivamente: el conjunto X tiene el poder global para forzar cualquier alternativa sobre otra en la lista de preferencias del grupo.

Ejemplos.

1. Con el método de la mayoría absoluta cualquier conjunto con más de la mitad de los votantes es un conjunto dictador.
2. Para cualquier método que satisfaga Pareto el conjunto P de todos los votantes es un conjunto dictador.
3. Si p es un individuo de P y X={p}, X es un conjunto dictador si y solo si p es un dictador.

Proposición 2. *Bajo las condiciones del teorema de Arrow, si X es un conjunto dictador y dividimos X en dos conjuntos disjuntos Y y Z, o bien Y es un conjunto dictador o bien Z es un conjunto dictador.*

Esta es la demostracion del teorema de Arrow, que se obtiene como un corolario de la proposición 2: Por el ejemplo 2, P es un conjunto dictador. Escribimos $P=\{p_1, p_2, ..., p_n\}$. Considera $Y=\{p_1\}$ y $Z=\{p_2, ..., p_n\}$. Por la proposición 2 o bien Y o bien Z son conjuntos dictadores. Si Y es un conjunto dictador, p_1 es un dictador y ya hemos probado el teorema. Si Z es un conjunto dictador se repite el proceso. Como P es finito se concluye que alguno de los votantes de P es un dictador.

La demostración de la proposición 2 se hace en los siguientes 5 lemas. En todos ellos se pone como hipótesis que se cumplan las condiciones del teorema de Arrow.

Lema 1. *Supongamos que X fuerza* $a > b$ *y c es una alternativa distinta de a y de b y dividamos X en dos conjuntos disjuntos Y y Z (se admite que uno de ellos pueda ser el vacío). Entonces, o bien Y fuerza* $a > c$ *o bien Z fuerza* $c > b$.

Demostración. Empezamos considerando qué sucederá cuando se aplica un método de votación que satisface las condiciones del Teorema de Arrow a la siguiente tabla de preferencias

X		
Y	Z	Resto
a	c	b
b	a	c
c	b	a
....	....	....

en la que el resto de las alternativas puede ponerse en cualquier lugar ya que IAI garantiza que la posición relativa de a, b y c no variará en la lista de preferencias global.

Como todos los votantes de X tienen a > b y X fuerza a > b, deducimos que a > b en la lista de preferencias del grupo obtenida con este método.

Afirmamos que en la lista de **preferencias del grupo debemos tener a > c o c > b**. De hecho, si sucediera lo contrario tendríamos b > c y c > a, que junto con a > b violaría la ordenación total de la lista de preferencias global (proposición 1).

Estudiamos cada caso por separado.

CASO 1. a > c en la lista de preferencias del grupo.

En este caso tenemos una tabla de preferencias en la que a > c en Y y c > a en el resto de votantes (incluidos los de Z), produciendo a > c en la lista de preferencias del grupo. Queremos probar que Y fuerza a > c . Para ello hay que considerar cualquier lista de preferencias en la que todos los votantes de Y tienen a > c. La situación general es:

Y	Y_1	Resto
....	....	....
a	a	c
....	....	....
c	c	a
....	....	....

Esta lista de preferencias tiene intercaladas alternativas diferentes de la a y la c. Por IAI podemos concluir que la tabla de preferencias siguiente

Y	Y_1	Resto
a	a	b
b	c	c
c	b	a
....	....	....

también produce la misma ordenación de a y c. Esta tabla es como la primera intercambiando las preferencias en cuanto a las alternativas a y c de los votantes de Y_1. Por la propiedad de monotonía el resultado es el mismo que para la lista de preferencias primera, es decir a > c. Esto muestra que, en este caso, Y fuerza a > c.

CASO 2. c > b en la lista de preferencias del grupo.

En este caso tenemos una tabla de preferencias en la que todos los votantes de Z tienen c > b mientras que b > c en el resto, produciendo c > b en la lista de preferencias del grupo. Usando la propiedad de monotonía e IAI se deduce, con un argumento similar al de caso 1 que cualquier lista en la que c > b en Z produce c > b en la lista de preferencias del grupo. Esto prueba que, en este caso, Z fuerza c > b.

Lema 2. *Supongamos que X fuerza* a > b *y c es una alternativa distinta de a y de b. Entonces X fuerza a > c y X fuerza c > b.*

Demostración. Tomando Y=X y Z=ϕ en el lema 1 se obtiene que X fuerza a > c. Tomando Y=ϕ y Z=X en el lema 1 se obtiene que X fuerza c > b.

Lema 3. *Si X fuerza a > b, entonces X fuerza b > a.*

Demostración. Sea c una alternativa distinta de a y de b. La siguiente cadena de implicaciones, todas ellas debidas al lema 2, muestran el resultado:

X fuerza a > b $\Rightarrow$ X fuerza a > c $\Rightarrow$ X fuerza b > c $\Rightarrow$ X fuerza b > a .

Lema 4. *Supongamos que hay dos alternativas a y b tal que X fuerza a > b . Entonces, X es un conjunto dictador.*

> El lema 4 expresa que si X tiene el poder local, entonces X tiene también el poder global en cualquier método que satisfaga las condiciones del teorema de Arrow.

Demostración. Sean x e y dos alternativas cualesquiera. Tenemos que probar que x fuerza x mayor que y.

Caso 1. a=y.

$$\text{X fuerza a > b} \overset{\text{Lema 3}}{\Rightarrow} \text{X fuerza b > a} \overset{\text{Lema 2}}{\Rightarrow} \text{X fuerza x > a=y .}$$

Caso 2. a≠y.

$$\text{X fuerza a > b} \overset{\text{Lema 2}}{\Rightarrow} \text{X fuerza a > y} \overset{\text{Lema 2}}{\Rightarrow} \text{X fuerza x > y .}$$

Lema 5. *Este lema es la proposición 2.*

Demostración. Sean a, b y c tres alternativas distintas. Como X es un conjunto dictador, X fuerza a > b. Por el lema 1, o bien Y fuerza a > c o bien Z fuerza c > b. Si y fuerza a > b, Y es un conjunto dictador por el lema 4; si Z fuerza c > b, Z es un conjunto dictador por el lema 4.