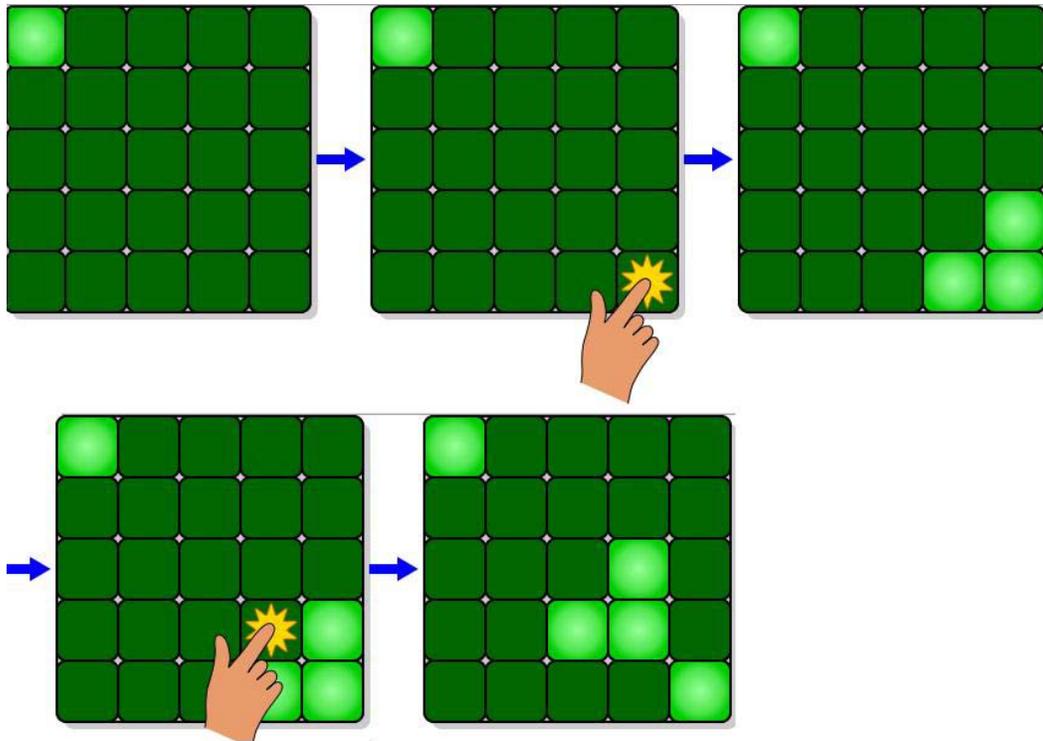


El juego de las luces

El juego de las luces (Lights Out) es un juego que se comercializó en 1995 consistente en un tablero de tamaño 5 x 5 formado por luces que pueden estar encendidas o apagadas. Cada vez que presionamos una casilla, esa casilla, así como las que están a su derecha, izquierda, arriba y abajo, pasa de apagada a encendida o de encendida a apagada.



El juego consiste en encender todas las casillas. Se puede empezar con todas ellas apagadas, o con alguna configuración inicial.

El juego de las luces se puede jugar en otros tableros de tamaño $m \times n$ (o incluso en tableros que no sean rectangulares).

En internet hay una versión del juego:

<http://www.genuine-lights-out.com/>

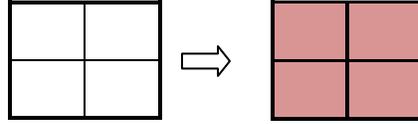
Calentando motores:

- Pulsemos una serie de casillas. ¿Qué ocurre si pulsamos las mismas casillas en otro orden?
- Ahora, pulsemos la misma casilla dos veces. ¿Qué ocurre?

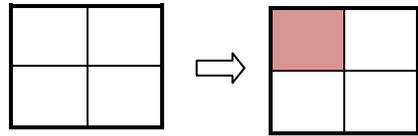
El tablero de 2 x 2

Empecemos con un tablero facilito. Contestemos a las siguientes preguntas. Tienes que marcar con una cruz las casillas que han de ser pulsadas en cada caso:

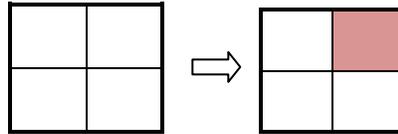
1. Encender todas las casillas:



2. Encender 1 esquina (la casilla marcada):

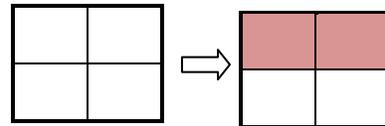


3. Encender otra esquina:



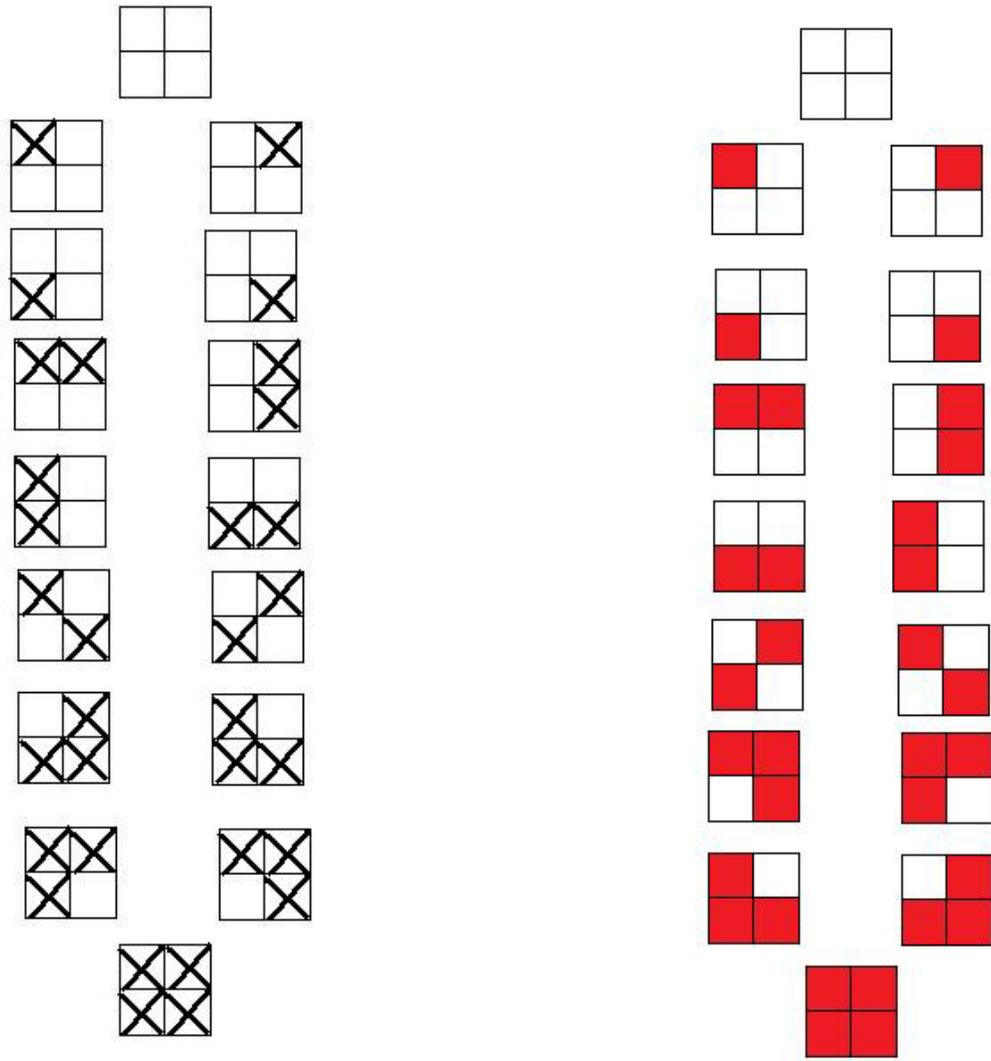
¿Cuál es la relación con el caso anterior?

4. ¿Cómo encenderías dos casillas?



Deduce la regla de superposición.

5. Si podemos encender una esquina, de hecho podemos encender cualesquiera luces que nos pidan. Asocia, a cada esquema de pulsaciones, las luces que se encienden.



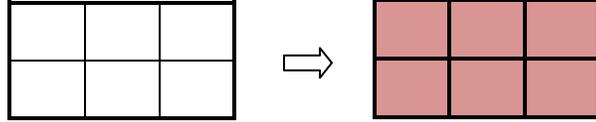
Tenemos 16 formas de pulsar, y 16 posibles combinaciones de luces.
 ¿Por qué tenemos este número?

16 =

El tablero de 3 x 2

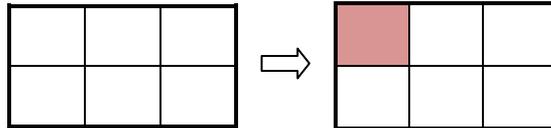
Ahora miramos a un tablero un poquito más grande.

1. ¿Sabrías encender todas las casillas?

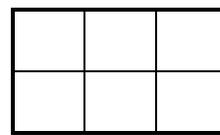
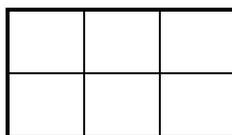
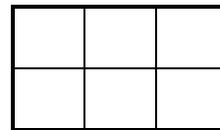
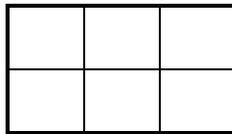


Hay varias soluciones. ¿Cuántas soluciones hay?

2. ¿Puedes encender 1 esquina?

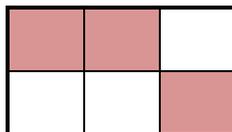


3. De hecho, hay formas de pulsar que nos dejan todas las luces apagadas. Encuentra cuáles.



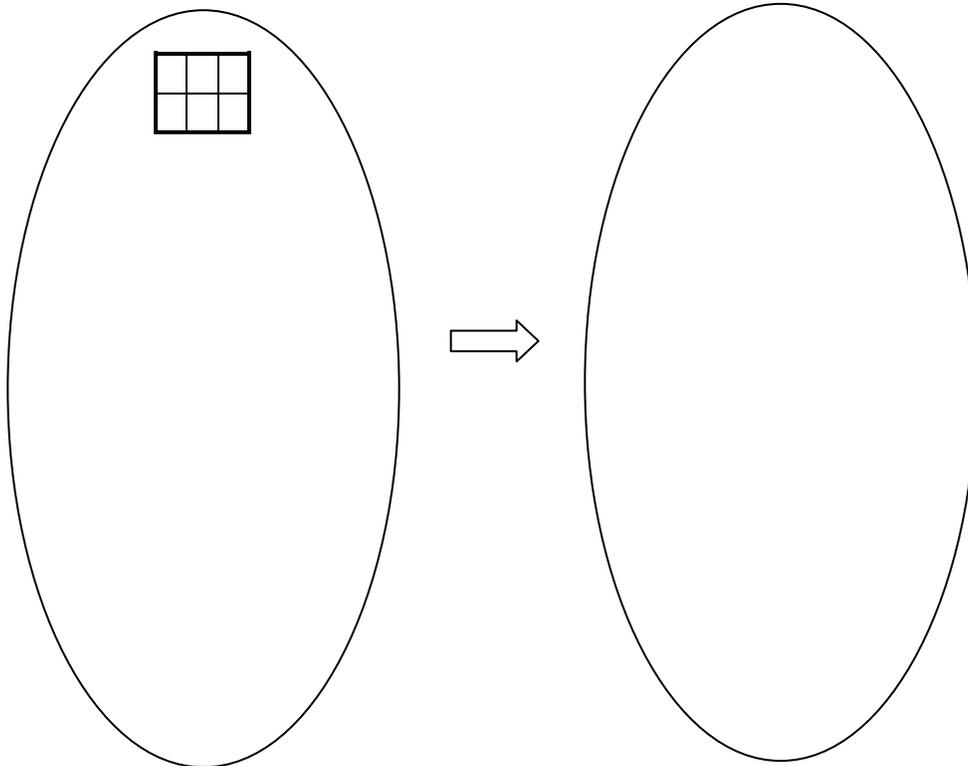
Una pista: usa la solución a la pregunta 1.

4. ¿De cuántas formas podemos llegar a esta configuración?



¿De cuántas formas podemos llegar a cualquier configuración?

5. Vamos a realizar la asociación entre esquemas de pulsaciones y luces que se encienden. En el tablero 3 x 2, ¿cuántas maneras hay de pulsar, y cuántas posibilidades hay de encender luces?



6. Finalmente, ¿cuántas posibles combinaciones de luces son “encendibles”?

7. ¿Y sabrías decir cuáles?

a	b	c
d	e	f

El tablero de 3 x 3

En el caso del tablero 3 x 3, podemos además aprovechar que tiene “simetría”, es decir, que lo podemos girar.

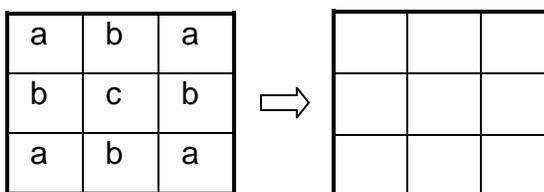
Vamos a intentar resolver el problema de encender el tablero siguiendo unos pasos.

1. Una pregunta sencilla para empezar: ¿cuáles son las simetrías del cuadrado?

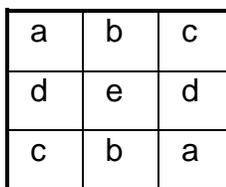
2. ¿Hay alguna forma de pulsar que apague todas las luces?

Lo vamos a dividir en varios sub-pasos:

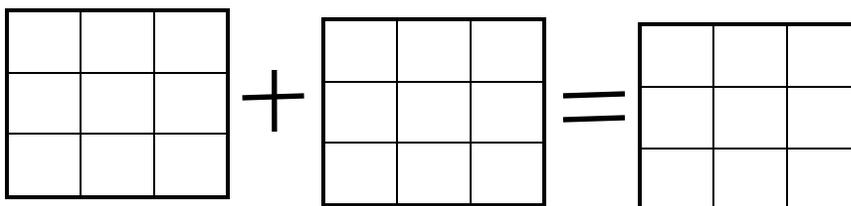
a) Hay alguna forma de pulsar “simétrica” que apague todas las luces:



b) Hay alguna forma de pulsar “simétrica con respecto al giro de 180° ” que apague todas las luces:



Razona así: si la hay, girándola 90° , tenemos otra forma de pulsar que también “apaga”. Sumando ambas (superponiendo), tenemos una forma de pulsar que “apaga” y que está en el caso (a). ¿Qué deduces?



c) Hay alguna forma de pulsar que apague todas las luces:

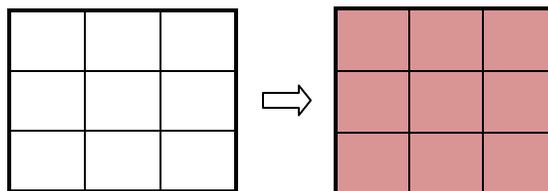
a	b	c
d	e	f
g	h	i

Suma ahora este tablero con el obtenido al girarlo 180°

3. Ahora podemos contestar a estas preguntas:

- ¿Cuántas formas de pulsar hay para conseguir cada panel de luces?
- ¿Cualquier panel de luces se puede conseguir?

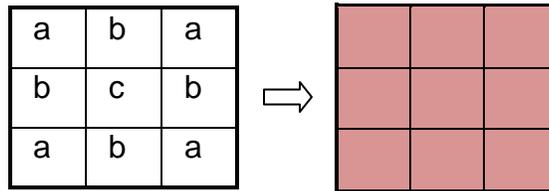
4. Por tanto, el problema siguiente:



tiene solución y sólo UNA solución.

5. ¿Qué le ocurre a la solución del paso 4 cuando la giramos?

6. Sabiendo que la solución es simétrica, averigua cuál es la solución:



Para pensar

Te atreverías ahora a intentar el tablero 2 x 4, o el tablero 3 x 4.
Y para los más valientes: intentad el 4 x 4.

En el tablero $n \times n$, siempre se pueden encender todas las luces.

- A veces se pueden encender de una manera única. En este caso, la manera es simétrica.
- A veces se pueden encender de varias maneras, y en este caso no es simétrica.