Departamento de Matemáticas, Facultad de Ciencias
Universidad Autónoma de Madrid

Semigrupos numéricos y sus invariantes.

Trabajo de fin de grado

Grado en Matemáticas

Autor: Isabel Fernández Abad
Tutor: Enrique González Jiménez

Curso 2021-2022

Agradecimientos

Quiero agradecer a Pedro García (Universidad de Granada) por proporcionarme diferentes ejemplos de semigrupos numéricos con dimensión 4 cuyo tipo no está acotado por la dimensión. También a Manuel Delgado (Universidade do Porto) por aclarar mis dudas acerca de su algoritmo ForcedIntegers y aceptar mis revisiones. A Arun Sunesh (Georgia State University) por explicarme pacientemente su trabajo acerca del semigrupo de Backelin. Y por supuesto, a Enrique por guiarme a lo largo de este viaje.

Símbolos

$\mathbb{N}$	Conjunto de los enteros no negativos.
S	Semigrupo numérico.
S^*	Semigrupo numérico sin el 0.
$e(S)$	Dimensión de S.
$m(S)$	Multiplicidad de S.
$L(S)$	Conjunto de lagunas de S.
$g(S)$	Número de Frobenius de S.
$l(S)$	Género de S.
$c(S)$	Conductor de S.
n_l	Número de semigrupos numéricos de género l.
$\mathrm{PF}(S)$	Pseudo-números de Frobenius de S.
$t(S)$	Tipo de S.
$N(S)$	Conjunto de elementos esporádicos de S.
$n(S)$	Longitud de S.
$\mathrm{Ap}(S,n)$	Conjunto de Apéry de S con respecto a n.
$\widehat{\mathrm{Ap}}(S,n)$	Base de S con respecto a n.

Resumen

Sea $\mathbb{N}$ el conjunto de los enteros no negativos. Un semigrupo numérico es un subconjunto de $\mathbb{N}$ cerrado bajo la suma, que contiene al 0 y cuyo complementario sobre $\mathbb{N}$ es finito. Todo semigrupo numérico está determinado por sus invariantes, y tras presentar los más relevantes nos centraremos en estudiar tres de ellos: número de Frobenius, pseudo-números de Frobenius y tipo.

Analizaremos después dos problemas abiertos que todavía están en el foco de la investigación. El primero es una versión más general del problema de Frobenius, cuyo enunciado original se basa en encontrar, fijados $a_1, \ldots, a_r \in \mathbb{N}$ coprimos entre sí, el mayor entero b para el cual la ecuación diofántica $\lambda_1 a_1 + \ldots + \lambda_r a_r = b$ no tiene solución en $\mathbb{N}$. El segundo, que podríamos entender como el inverso del problema anterior, se basa en encontrar bajo qué condiciones existen semigrupos numéricos que tengan por pseudo-números de Frobenius un conjunto de naturales dado.

Abstract

Let $\mathbb{N}$ be the set of nonnegative integers. A numerical semigroup is a subset of $\mathbb{N}$ that is closed under addition, contains the zero element and whose complement in $\mathbb{N}$ is finite. Every numerical semigroup is uniquely determined by its invariats, and after introducing the most relevant ones we will focus on three of them: the Frobenius number, the pseudo-Frobenius numbers and the type.

Furthermore we will look at two open problems still the topic of current research. The first one is a generalisation of the Frobenius problem, which originally aimed to find the greatest integer b for which the diophantine equation $\lambda_1 a_1 + \ldots + \lambda_r a_r = b$ has no solutions in $\mathbb{N}$, where $a_1, \ldots, a_r \in \mathbb{N}$. The second one is about exploring the necessary conditions for the existence of a numerical semigroup which has as pseudo-Frobenius numbers a given set of natural numbers.

Índice general

Introducción

El problema de la moneda, postulado por Frobenius a finales del siglo XIX, consiste en encontrar la mayor cantidad de dinero que no podemos obtener utilizando solo monedas de denominaciones específicas. Dicho de otro modo, dados $a_1, \ldots, a_r \in \mathbb{N}$ tales que $\gcd(a_1, \ldots, a_r) = 1$, el también llamado problema de Frobenius consiste en encontrar el mayor entero b para el cual la ecuación diofántica $\lambda_1 a_1 + \ldots + \lambda_r a_r = b$ no tiene solución en $\mathbb{N}$. De hecho, el conjunto de los $b \in \mathbb{N}$ tales que $\lambda_1 a_1 + \ldots + \lambda_r a_r = b$ tiene solución en $\mathbb{N}$ conforma un semigrupo numérico.

Un semigrupo numérico es un subconjunto de $\mathbb{N}$ cerrado bajo la suma, que contiene al 0 y cuyo complementario sobre $\mathbb{N}$ es finito. Como acabamos de afirmar, el conjunto $\langle a_1, \ldots, a_r \rangle = \{\lambda_1 a_1 + \ldots + \lambda_r a_r \mid \lambda_i \in \mathbb{N}\}$ es un semigrupo numérico, y de hecho todo semigrupo numérico puede escribirse de este modo. Por tanto, el objeto de búsqueda del problema de Frobenius (que recibe el nombre de número de Frobenius) es el mayor entero que no pertenece al semigrupo numérico generado por $\{a_1, \ldots, a_r\}$.

Durante la segunda mitad del siglo XX, los semigrupos numéricos volvieron a entrar en escena debido a sus múltiples aplicaciones en geometría algebraica. Aunque en este trabajo no nos adentraremos en dicho campo, algunos invariantes de los semigrupos numéricos han sido nombrados en base a esta relación, como por ejemplo la multiplicidad, el tipo o el conductor, y es por ello que el lector familiarizado con la geometría algebraica no debe extrañarse al encontrar estas similitudes.

Los objetivos de este trabajo han sido dos. El primero de ellos ha sido generar una memoria auto-contenida en la que se expongan demostraciones alternativas a las propuestas en la literatura actual para los diferentes resultados que vamos a estudiar. Si no se indica lo contrario al comienzo de la demostración (mediante una cita a la referencia correspondiente), esta es original. Esto también se aplica a los diferentes resultados expuestos; entre los propuestos en este trabajo merece especial mención el Corolario 1.31.

El segundo objetivo, aprovechando que actualmente se produce mucha literatura en torno a los semigrupos numéricos, ha sido acercarse a la línea de lo que actualmente se está investigando y analizar dos problemas abiertos.

En la primera parte del trabajo presentaremos los invariantes más relevantes de los semigrupos numéricos, haciendo especial énfasis en los que en este trabajo llamaremos invariantes de Frobenius: el número de Frobenius, los pseudo-números de Frobenius (entre los cuales se encuentra el número de Frobenius) y el tipo. Expondremos tres caracterizaciones del conjunto de pseudo-números de Frobenius; dos de ellas ya conocidas y una tercera que no se ha podido encontrar en la literatura existente.

En la segunda parte, realizaremos un acercamiento a dos problemas abiertos relacionados con los invariantes de Frobenius. El primero es el propio problema de Frobenius, aunque en este caso no solo buscaremos el número de Frobenius, sino también el resto de pseudo-números de Frobenius. Poco después de que este matemático enunciara su problema diofántico, Sylvester lo resolvió para el caso $r = 2$ (i.e. halló una fórmula que a partir de los generadores $\{a_1, a_2\}$ calculaba el número de Frobenius del semigrupo numérico generado por $\{a_1, a_2\}$). El caso $r = 3$ es significativamente más complejo, y aquí dedicamos buena parte del segundo capítulo a su resolución. Para $r \geq 4$ no se conoce la solución, pero Curtis [4] probó que si existe, no puede venir dada por un polinomio.

El segundo problema tiene el enfoque opuesto; dado un conjunto de enteros positivos, estudiaremos bajo qué condiciones existen semigrupos numéricos para los cuales este sea su conjunto de pseudo-números de Frobenius. Fijar los pseudo-números de Frobenius fuerza a que determinados enteros pertenezcan al semigrupo numérico (elementos forzados), y también obliga a que otros no lo hagan (lagunas forzadas). Presentaremos una serie de resultados que nos permitirán hallar estos elementos y lagunas forzadas, y luego expondremos dos algoritmos que recogen de manera ordenada los pasos a seguir para obtener estos enteros forzados. Conocer todos los enteros forzados es equivalente a saber si existen semigrupos numéricos con un determinado conjunto de pseudo-números de Frobenius.

Todo esto lo haremos apoyándonos en el paquete `NumericalSgps` [5] de `GAP` [17]. Esta herramienta ha jugado un papel crucial en el desarrollo de este trabajo, pues la facilidad que ofrece para generar ejemplos ha proporcionado la intuición de algunos de los resultados originales de este trabajo. Es por ello que la utilizaremos a menudo a lo largo del escrito.

CAPÍTULO 1

Semigrupos numéricos. Conceptos Básicos.

1.1. Semigrupos numéricos y sus generadores.

Definición 1.1 (Semigrupo)**.** Un semigrupo es un par $(M, *)$ tal que M es un conjunto cerrado bajo la operación $*$, donde $*$ verifica la propiedad asociativa.

Definición 1.2 (Monoide)**.** Un monoide $(M, *)$ es un semigrupo con un elemento neutro, i.e.:

$$\exists e \in M \quad \text{tal que} \quad a * e = e * a = a, \quad \forall a \in M.$$

Un subconjunto H de M con la operación $*$ es un submonoide de $(M, *)$ si es cerrado para dicha operación y además el elemento neutro de M pertece a H.

Definición 1.3 (Semigrupo numérico)**.** Un semigrupo numérico $(S, *)$ es un submonoide de $(\mathbb{N}, +)$ tal que el complementario de S en $\mathbb{N}$ es finito.

Para aligerar la notación, en lugar de denotar los semigrupos numéricos como $(S, +)$ los escribiremos simplemente como S, ya que la operación de los semigrupos numéricos es por definición $+$. Cuando hablemos de semigrupo numérico propio nos referiremos a un semigrupo numérico en el que S es un subconjunto propio de $\mathbb{N}$, i.e. $S \subsetneq \mathbb{N}$.

La forma más común de describir un semigrupo numérico es a partir de sus generadores. Si $A = \{a_1, \ldots, a_r\}$ es un conjunto finito no vacío de $\mathbb{N}$, denotamos por $\langle A \rangle$ al submonoide de $\mathbb{N}$ generado por A, es decir:

$$\langle A \rangle := \{\lambda_1 a_1 + \ldots + \lambda_r a_r \mid \lambda_i \in \mathbb{N}, a_i \in A\}.$$

Proposición 1.4 (Lema 2.1 en [14])**.** *Sea A un subconjunto finito de $\mathbb{N}$. Entonces $\langle A \rangle$ es un semigrupo numérico si y solo si* $\gcd(A) = 1$.

Demostración. $\underline{\Longrightarrow}$ Demostramos la formulación equivalente: Si $\gcd(A) = d > 1$, entonces $\langle A \rangle$ no es un semigrupo numérico. Si $\gcd(A) = d$, cada $a \in A$ se puede escribir como $a = da'$ con $a' \in \mathbb{N}$. Por tanto, si $A = \{a_1, \ldots, a_r\}$ se tendrá que

$\langle A\rangle = \{d(\lambda_1 a'_1 + \ldots + \lambda_r a'_r) \mid \lambda_i \in \mathbb{N}, da'_i \in A\}$. Basta usar que hay infinitos números primos mayores que d (y que por tanto no pueden estar en $\langle A\rangle$), de modo que el complementario de $\langle A\rangle$ en $\mathbb{N}$ no es finito, y $\langle A\rangle$ no es un semigrupo numérico.
$\Longleftarrow$ En primer lugar, $+$ es una operación asociativa en $\mathbb{N}$ y por lo tanto también en $\langle A\rangle$.
Por otra parte $\langle A\rangle$ es cerrado por adición; si $\alpha = \lambda_1 a_1 + \ldots + \lambda_r a_r$ y $\beta = \mu_1 a_1 + \ldots + \mu_r a_r$ son dos elementos de $\langle A\rangle$, entonces $\alpha + \beta = (\lambda_1 + \mu_1)a_1 + \ldots + (\lambda_r + \mu_r)a_r \in \langle A\rangle$.
Se tiene además que 0, el elemento neutro de $(\mathbb{N}, +)$, está en A (basta tomar todos los $\lambda_i = 0$).
Falta ver que el complementario de $\langle A\rangle$ en $\mathbb{N}$ es finito. Si $1 \in A$, el resultado es inmediato. Supongamos que $1 \notin A$. Como $\gcd(A) = 1$, la ecuación $a_1x_1 + \ldots + a_rx_r = 1$ tiene solución en $\mathbb{Z}$. Dado que $1 \notin A$, algunos de los x_i serán negativos; pasamos todos estos al lado derecho de la ecuación, que quedará de la forma

$$\underbrace{a_{j_1}x_{j_1} + \ldots + a_{j_t}x_{j_t}}_{1+s} = 1 \underbrace{-a_{j_{t+1}}x_{j_{t+1}} - \ldots - a_{j_r}x_{j_r}}_{s}.$$

Observemos que tanto s como $s+1$ están en $\langle A\rangle$, pues ambos son una combinación lineal de los generadores en la que los coeficientes están todos en $\mathbb{N}$. Al tener dos números consecutivos en $\langle A\rangle$ se tiene que si $n \geq s^2 - 1$, entonces $n \in \langle A\rangle$. Veamos esta afirmación. Si $n \geq s^2 - 1 = (s-1)s + (s-1)$, entonces $n = qs + k$ para ciertos $q, k \in \mathbb{N}$, $0 \leq k \leq s-1$. Por tanto

$$qs + (s-1) \geq \underbrace{qs + k}_{n} \geq (s-1)s + (s-1).$$

En concreto, de $qs + (s-1) \geq (s-1)s + (s-1)$ se deduce que $q \geq s-1$, y por tanto $q \geq k$. Ahora; $n = (ks + k) + (q-k)s = k(s+1) + (q-k)s \in \langle A\rangle$ por tratarse de una combinación lineal de dos elementos de $\langle A\rangle$ en la que los coeficientes están en $\mathbb{N}$. Esto prueba que si $n \geq s^2 - 1$, entonces $n \in \langle A\rangle$, de modo que el complementario de $\langle A\rangle$ en $\mathbb{N}$ es finito. Por tanto, $\langle A\rangle$ es un semigrupo numérico.

□

En la anterior proposición hemos tomado un conjunto de generadores finito. El siguiente enunciado establece que esto es suficiente para generar cualquier semigrupo numérico.

Proposición 1.5 (Proposición 3 en [1]). *Todo semigrupo numérico S está finitamente generado.*

Demostración. Tomemos $s \in S^*$. Entonces existe un conjunto de generadores A que tiene como mucho s elementos, uno por cada clase módulo s. Esto es así porque si $a_1, a_2 \in A, a_1 < a_2, a_1 \equiv a_2 \pmod{s}$, entonces $a_2 = a_1 + sk$ con $k \in \mathbb{N}$, de modo que $A \backslash \{a_2\}$ también es un conjunto de generadores de S. □

La idea detrás de la anterior demostración motiva la definición del conjunto de Apéry.

Definición 1.6 (Conjunto de Apéry)**.** Sea $n \in S^*$. Se define el conjunto de Apéry de S con respecto a n de la siguiente manera:

$$\mathrm{Ap}(S,n) := \{s \in S \mid s - n \notin S\}. \tag{1.1}$$

Las dos siguientes proposiciones pretenden mostrar una forma diferente de caracterizar los elementos de un conjunto de Apéry.

Proposición 1.7 (Lema 1 en [1])**.** *Sea S un semigrupo numérico y sea $n \in S^*$. Entonces $Ap(S,n) = \{0, w(1), \ldots, w(n-1)\}$, donde $w(i)$ denota el menor elemento de S tal que $w(i) \equiv i \pmod{n}$.*

Demostración. Como $w(i) - n \equiv i \pmod{n}$, por minimalidad de $w(i)$ se tiene que $w(i) - n \notin S$, y por definición se tiene que $w(i) \in S$. De este modo, $w(i) \in \mathrm{Ap}(S,n)$. Esto prueba un contenido. Para el otro, sea $n \in S^*$ y sea $a \in \mathrm{Ap}(S,n)$. Entonces $a \equiv i \pmod{n}$ para algún $i = 0, \ldots, n-1$. Si $i = 0$, entonces $a = 0$, porque para cualquier otro a de la clase 0 se tendría $a - n \in S$ por $0, n \in S$, lo cual se contradice con $a \in \mathrm{Ap}(S,n)$. Si $i \neq 0$, entonces $a = k_i n + i$ con $k_i \in \mathbb{N}$. Entonces o bien $a = w(i)$, o bien $a = w(i) + kn$ para algún $k \geq 0$ (si $k < 0$, $a \notin S$ por minimalidad de $w(i)$). Pero entonces $a - n = w(i) + (k-1)n \in S$ por $k - 1 \in \mathbb{N}$, de modo que $a \notin \mathrm{Ap}(s,n)$. Por tanto necesariamente o bien $a = 0$, o bien $a = w(i)$ para algún $i = 1, \ldots, n-1$. $\square$

Obsérvese que esto implica que $|\mathrm{Ap}(S,n)| = n$.

Proposición 1.8. *Sea $S = \langle a_1, \ldots, a_n \rangle$ un semigrupo numérico, y sea $x \in S$. Entonces para todo $i = 1, \ldots, n$:*

$$x \notin Ap(S,a_i) \Longleftrightarrow \text{ existen } \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{N} \text{ con } \lambda_i \neq 0 \text{ tales que } x = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j a_j. \tag{1.2}$$

Demostración. $\Longrightarrow$ Demostramos la formulación equivalente: si para todos $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{N}$ tales que $x = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j a_j$ se tiene que $\lambda_i = 0$, entonces $x \in \mathrm{Ap}(S,a_i)$. Como $x \in S$, solo falta ver que $x - a_i \notin S$. Supongamos que $x - a_i \in S$, es decir,

$$x - a_i = \lambda_1 a_1 + \ldots + \lambda_{i-1} a_{i-1} - a_i + \lambda_{i+1} a_{i+1} + \ldots + \lambda_n a_n = \sum_{j=0}^{n} \lambda'_j a_j$$

para ciertos $\lambda'_j \in \mathbb{N}$. Entonces se tendría

$$x = \lambda_1 a_1 + \ldots + \lambda_{i-1} a_{i-1} + \lambda_{i+1} a_{i+1} + \ldots + \lambda_n a_n = a_i + \sum_{j=0}^{n} \lambda'_j a_j$$

lo que nos da una colección de coeficientes en los naturales tal que el coeficiente i-ésimo es estrictamente positivo, y esto es una contradicción con la hipótesis inicial.
$\Longleftarrow$ Si $x = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j a_j$ con $\lambda_i \neq 0$ entonces $x \in S$, $x - a_i \in S$ luego $x \notin \mathrm{Ap}(S,a_i)$. $\square$

El siguiente lema nos proporciona una forma diferente de visualizar el conjunto de Apéry.

Lema 1.9 (Lema 3.1 en [3]). *Sea $S = \langle a_1, \dots, a_r \rangle$ un semigrupo numérico y sea $n \in S^*$. Si $\sum_{i=1}^{r} \lambda_i a_i \in Ap(S,n)$ entonces $\sum_{i=1}^{r} \lambda'_i a_i \in Ap(S,n)$ para cualesquiera $0 \leq \lambda'_i \leq \lambda_i$, $i = 1, \dots, r$.*

Demostración. Para demostrarlo recurrimos a la propia definición de conjunto de Apéry. Está claro que $\sum_{i=1}^{r} \lambda'_i a_i \in S$, de modo que solo falta ver $\sum_{i=1}^{r} \lambda'_i a_i - n \notin S$. Podemos escribir

$$\underbrace{\sum_{i=1}^{r} \lambda'_i a_i - n}_{a} = \underbrace{\sum_{i=1}^{r} \lambda_i a_i - n}_{b} - \underbrace{\sum_{i=1}^{r} (\lambda_i - \lambda'_i) a_i}_{c}.$$

Ahora bien; $b \notin S$ por la definición de conjunto de Apéry, y $c \in S$. Como $b = a + c$, ha de ser $a \notin S$ (de lo contrario $b = a + c \in S$). Por tanto $\sum_{i=1}^{r} \lambda'_i a_i - n \in \mathrm{Ap}(S,n)$. □

El conjunto de Apéry nos permite caracterizar de forma única los elementos del semigrupo numérico.

Proposición 1.10 (Lema 2.6 en [14]). *Sea S un semigrupo numérico y sea $n \in S^*$. Entonces para todo $s \in S$ existe un único par $(k,w) \in \mathbb{N} \times Ap(S,n)$ tal que $s = kn + w$.*

Demostración. Basta tomar $w = \min_{q \in S}\{q \equiv s \pmod{n}\}$. Entonces por definición $w \in S$ pero $w - n \notin S$, de modo que $w \in \mathrm{Ap}(S,n)$. El valor de k viene determinado unívocamente por la elección de w. La unicidad se deduce de que en el conjunto $\mathrm{Ap}(S,n)$ hay un único elemento por cada clase módulo n, y por tanto hay un único $w \equiv s \pmod{n}$. □

Este resultado deja entrever que a partir del conjunto de Apéry podemos obtener un conjunto de generadores. Antes de demostrar esto, necesitamos una nueva definición.

Definición 1.11 (Base estándar). Sea S un semigrupo numérico y sea $n \in S^*$. Se define la base de S sobre n como

$$\widehat{\mathrm{Ap}}(S,n) := \mathrm{Ap}(S,n) \backslash \{0\} \cup \{n\}. \tag{1.3}$$

En particular, cuando $n = \min(S^*)$ este conjunto recibe el nombre de base estándar.

Corolario 1.12. *Sea S un semigrupo numérico y sea $n \in S^*$. Entonces*

$$\langle \widehat{Ap}(S,n) \rangle = S. \tag{1.4}$$

Demostración. Se deduce de manera inmediata de la Proposición 1.10. □

Este corolario también proporciona una demostración alternativa a la Proposición 1.5, puesto que $\widehat{\mathrm{Ap}}(S,n)$ es un conjunto de generadores de S con n elementos.

Una vez visto que todo semigrupo numérico está finitamente generado, es natural preguntarse si existe un único conjunto minimal de generadores.

Definición 1.13 (Conjunto minimal de generadores)**.** Sea S un semigrupo numérico y sea $A \subset S$. Entonces A es un conjunto minimal de generadores de S si $S = \langle A \rangle$ y ningún subconjunto propio de A cumple esta propiedad.

Proposición 1.14 (Corolario 2 en [1])**.** *Sea S un semigrupo numérico. Entonces S tiene un conjunto de generadores minimal, que es finito y único, y viene dado por la expresión $S^* \backslash (S^* + S^*)$.*

Demostración [1]. Por la propia definición de dicho conjunto, está claro que genera todo el semigrupo numérico. Para ver que el conjunto de generadores es efectivamente finito basta comprobar que es minimal, pues como hemos visto, todo semigrupo numérico está finitamente generado.
Sea $A = S^* \backslash (S^* + S^*)$ y sea B un conjunto minimal de generadores cualquiera. Vamos a probar que necesariamente $A = B$. Tomamos $b \in B$. Si $b \notin A$, entonces $b = a + c$ para algunos $a, c \in S^*$. Entonces $B \backslash \{b\}$ sería un conjunto minimal de generadores, lo cual se contradice con la minimalidad de B. Esto prueba que $B \subset A$.
Sea ahora $a \in A \subset S = \langle B \rangle$. Entonces $a = \sum_{b \in B} \lambda_b b$ con $\lambda_b \in \mathbb{N}$. Pero $a \in S^* \backslash (S^* + S^*)$, de modo que $\sum_{b \in B} \lambda_b = 1$; en otras palabras, existe un $b \in B$ tal que $a = b$, lo cual prueba $A \subset B$. De este modo, A es el conjunto minimal de generadores, que es finito por ser minimal, y además único. □

1.2. Invariantes de un semigrupo numérico.

Los semigrupos numéricos tienen una serie de atributos que los caracterizan, a los que llamamos invariantes. Gran parte del trabajo que se realiza sobre semigrupos numéricos se basa en estudiar estos atributos. En esta sección se pretende dar un breve resumen de los resultados alcanzados hasta el momento sobre los invariantes más relevantes, además de comentar algunas de las conjeturas y problemas abiertos que existen a día de hoy.

Definición 1.15 (Invariantes)**.** Dado un semigrupo numérico $S = \langle a_1, \ldots a_n \rangle$, se definen los siguientes invariantes:

- La multiplicidad $m(S)$, el menor elemento de S^*, es decir $m(S) = \text{mín}(S^*)$.
- La dimensión $e(S)$, el cardinal del conjunto minimal de generadores, i.e. $e(S) = |S^* \backslash (S * + S^*)|$.
- El conjunto de lagunas $L(S)$, el complementario de S en $\mathbb{N}$, i.e. $L(S) = \mathbb{N} \backslash S$.
- El género $l(S)$, el cardinal de $L(S)$.
- El número de Frobenius $g(S)$, el mayor entero b para el cual la ecuación diofántica $a_1 x_1 + \ldots + a_n x_n = b$ no tiene solución en $\mathbb{N}$.
- El conductor $c(S)$, definido como $c(S) = g(S) + 1$.
- Los pseudo-números de Frobenius $\text{PF}(S)$, definidos como

$$\text{PF}(S) = \{x \notin S \mid x + s \in S \ \forall s \in S^*\}. \tag{1.5}$$

- El tipo $t(S)$, el cardinal del conjunto de pseudo-números de Frobenius de S.
- El conjunto de elementos esporádicos $N(S)$, los elementos de S menores que $g(S)$.
- La longitud $n(S)$, el cardinal de los elementos esporádicos.

Observemos que tal y como hemos definido el número de Frobenius,

$$g(S) = \begin{cases} \text{máx}(\mathbb{N}\backslash S) = \text{máx}(L(S)) & \text{si } S \neq \mathbb{N} \\ -1 & \text{si } S = \mathbb{N} \end{cases}$$

Esto nos permite ver también que $g(S) = \text{máx}(\text{PF}(S))$.

Ejemplo 1.16.

```
gap> S:=NumericalSemigroup(5,9,11);
<Numerical semigroup with 3 generators>
gap> SmallElements(S);
[ 0, 5, 9, 10, 11, 14, 15, 16, 18 ]
```

Esto quiere decir que $S = \{0, 5, 9, 10, 11, 14, 15, 16, 18, \rightarrow\}$, donde la flecha indica que todo entero mayor que 18 está en el conjunto.

```
gap> Multiplicity(S); #Multiplicidad
5
gap> MinimalGeneratingSystem(5,9,11); #Conjunto minimal de generadores
[ 5, 9, 11 ]
```

Como el conjunto minimal de generadores tiene tres elementos, ya sabemos que la dimensión va a ser tres.

```
gap> EmbeddingDimension(S); #Dimensión
3
gap> Gaps(S); #Lagunas
[ 1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 12, 13, 17 ]
gap> Genus(S); #Género
10
gap> FrobeniusNumber(S); #Número de Frobenius
17
gap> Conductor(S); #Conductor
18
gap> PseudoFrobenius(S); #Pseudo-números de Frobenius
[ 13, 17 ]
gap> Type(S); #Tipo
2
gap> ElementsUpTo(S,FrobeniusNumber(S)); #Elementos esporádicos
[ 0, 5, 9, 10, 11, 14, 15, 16 ]
gap> Length(S); #Longitud
8
```

Veamos ahora cómo son estos invariantes cuando $S = \mathbb{N}$.

Ejemplo 1.17.

```
gap> N:=NumericalSemigroup(1);
<The numerical semigroup N>
gap> SmallElements(N);
[ 0 ]
gap> Multiplicity(N); #Multiplicidad
1
gap> MinimalGeneratingSystem(N); #Conjunto minimal de generadores
[ 1 ]
gap> EmbeddingDimension(N); #Dimensión
1
gap> Gaps(N); #Lagunas
[  ]
gap> Genus(N); #Género
0
gap> FrobeniusNumber(N); #Número de Frobenius
-1
gap> Conductor(N); #Conductor
0
gap> PseudoFrobenius(N); #Pseudo-números de Frobenius
[ -1 ]
gap> Type(N); #Tipo
1
gap> Length(N); #Longitud
0
```

Ahora pasemos a ver algunos resultados acerca de los invariantes.

Proposición 1.18 (Proposición 2.10 en [14])**.** $e(S) \leq m(S)$.

Demostración. Se tiene que $\widehat{\mathrm{Ap}}(S, m(S))$ genera el semigrupo numérico, y su cardinal es $m(S)$. Por tanto necesariamente $e(S) \leq m(S)$. □

Los semigrupos numéricos para los cuales $e(S) = m(S)$ reciben el nombre de semigrupos numéricos con dimensión maximal. A continuación se presenta una caracterización para esta condición, así como una forma de obtener semigrupos numéricos de dimensión maximal.

Proposición 1.19 (Proposición 3.1 en [14])**.** *Sea S un semigrupo numérico y sea $\{n_1 < \ldots < n_e\}$ su conjunto minimal de generadores. Entonces S tiene dimensión maximal si y solo si $Ap(S, n_1) = \{0, n_2, \ldots, n_e\}$.*

Demostración. Como $m(S) = n_1$, se tiene la siguiente sucesión de equivalencias:

$$\begin{aligned} m(S) = e(S) &\Longleftrightarrow |\mathrm{Ap}(S, n_1)| = e(S) \\ &\Longleftrightarrow |\widehat{\mathrm{Ap}}(S, n_1)| = e(S)\ (= |\{n_1, \ldots, n_e\}|) \\ &\overset{(*)}{\Longleftrightarrow} \widehat{\mathrm{Ap}}(S, n_1) = \{n_1, \ldots, n_e\} \\ &\Longleftrightarrow \mathrm{Ap}(S, n_1) = \{0, n_2, \ldots, n_e\}. \end{aligned}$$

La equivalencia $(*)$ es cierta porque $\{n_1, \ldots, n_e\} \subset \widehat{\mathrm{Ap}}(S, n_1)$ (por Corolario 1.12) y $|\{n_1, \ldots, n_e\}| = |\widehat{\mathrm{Ap}}(S, n_1)|$.

□

Obsérvese que en la anterior proposición es necesario que el conjunto de Apéry sea respecto a $n_1 = m(S)$. El conjunto de Apéry sobre cualquiera de los otros generadores tiene un cardinal estrictamente mayor que no podemos relacionar con $e(S)$, y por tanto no aporta información sobre si el semigrupo numérico tiene dimensión maximal. Además, la hipótesis de que el conjunto de generadores dado sea minimal también es imprescindible, como se puede ver en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 1.20.

```
gap> S:=NumericalSemigroup(4,9,14,23);
<Numerical semigroup with 4 generators>
gap> G:=Generators(S);
[ 4, 9, 14, 23 ]
gap> Ap:=AperyList(S,4); #Conjunto de Apéry de S sobre 4
[ 0, 9, 14, 23 ]
gap> SubtractSet(G,[4]); G; #Quito el 4 del conjunto G
[ 9, 14, 23 ]
gap> UniteSet(G,[0]); G; #Le añado 0 al conjunto G
[ 0, 9, 14, 23 ]
gap> Ap=G; #Comprubo que Ap(S,4)={0,9,14,23}
true
gap> IsMED(S); #Compurebo si S tiene dimensión maximal
false
gap> MinimalGeneratingSystem(S); #Conjunto minimal de generadores
[ 4, 9, 14 ]
```

A pesar de que se cumple $\mathrm{Ap}(S, n_1) = \{0, n_2, \ldots, n_e\}$, el semigrupo numérico no tiene dimensón maximal, pues el conjunto de generadores inicial no era un conjunto minimal de generadores.

Proposición 1.21 (Corolario 3.7 en [14])**.** *Sea S un semigrupo numérico y sea $n \in S^*$. Entonces $\langle n, n + w(1), \ldots, n + w(n-1)\rangle$ es un semigrupo numérico de dimensión maximal, donde $w(i) = \min_{s \in S}\{s \equiv i \pmod{n}\}$.*

Para demostrar este resultado usaremos la Proposición 1.19. Por tanto es necesario comprobar primero que este conjunto de generadores es efectivamente minimal. Observemos que $\{n, n + w(1), \ldots, n + w(n-1)\} = \mathrm{Ap}(S, n) + n$.

Lema 1.22. *Sea S un semigrupo numérico y sea $n \in S^*$. Entonces $\langle n, n+w(1), \dots, n+w(n-1)\rangle$ es un semigrupo numérico para el cual $\{n, n+w(1), \dots, n+w(n-1)\}$ es el conjunto minimal de generadores, donde $w(i) = \text{mín}_{s\in S}\{s \equiv i \pmod{n}\}$.*

Demostración. Denotando $n = n+w(0)$, veamos que ningún $n+w(i)$ puede expresarse como combinación lineal de los otros generadores. Supongamos que

$$n + w(i) = \sum_{j\neq i} \lambda_j (n + w(j)) = n \sum_{j\neq i} \lambda_j + \sum_{j\neq i} \lambda_j w(j)$$

donde $\lambda_j \in \mathbb{N}$ para todo j. Se tiene que $n+w(i)-2n \notin S$ por la minimalidad de $w(i)$. Por tanto,

$$n \sum_{j\neq i} \lambda_j + \sum_{j\neq i} \lambda_j w(j) - 2n = n \left(\sum_{j\neq i} \lambda_j - 2\right) + \sum_{j\neq i} \lambda_j w(j) \notin S.$$

Como $\sum_{j\neq i} \lambda_j w(j) \in S$, esto solo puede pasar si $\sum_{j\neq i} \lambda_j < 2$. Por tanto, $n + w(i) = n + w(j)$ para algún $j \neq i$, que es una contradicción. Concluimos que el conjunto de generadores es en efecto minimal. □

Demostración de la Proposición 1.21. Como $\text{Ap}(S, n) + n$ es un conjunto minimal de generadores (por el Lema 1.22), de acuerdo con la Proposición 1.19, $\langle \text{Ap}(S, n) + n\rangle$ es un semigrupo numérico de dimensión maximal si y solo si $\text{Ap}(\langle \text{Ap}(S, n) + n\rangle, n) = (\text{Ap}(S, n) + n)\backslash\{n\} \cup \{0\}$. Por tanto basta con demostrar esta igualdad.
Para el primer contenido, supongamos $m \in \text{Ap}(\langle \text{Ap}(S, n) + n\rangle, n)$, de modo que $m = w'(i)$ con $w'(i) = \text{mín}_{s\in\langle \text{Ap}(S,n)+n\rangle}\{s \equiv i \pmod{n}\}$. Si $i \neq 0$, como en $\text{Ap}(S, n) + n$ ya hay un elemento de cada clase módulo n se tiene que $m \in \text{Ap}(S, n) + n$. Si $i = 0$, entonces $m = w'(0) = 0 \in \langle \text{Ap}(S, n) + n\rangle$. Por tanto concluimos que $m \in (\text{Ap}(S, n) + n)\backslash\{n\} \cup \{0\}$.
Para el otro contenido, sea $m \in (\text{Ap}(S, n) + n)\backslash\{n\} \cup \{0\}$. Por una parte esto implica que $m \in \langle \text{Ap}(S, n) + n\rangle$, de modo que solo falta ver que $m - n \notin \langle \text{Ap}(S, n) + n\rangle$. Como $m \in (\text{Ap}(S, n) + n)\backslash\{n\} \cup \{0\}$ se tiene que $m = w'(i)$ para algún $i = 1, \dots, n-1$, donde $w'(0) = 0$ y $w'(i) = n + \text{mín}_{s\in S}\{s \equiv i \pmod{n}\} = n + w(i)$. De este modo, si $i = 0$ se tiene que $m - n = -n \notin \langle \text{Ap}(S, n) + n\rangle$. Si $i \neq 0$, $m - n = w(i) \notin \langle \text{Ap}(S, n) + n\rangle$, porque si $w(i) \in \langle \text{Ap}(S, n) + n\rangle$, se tendría que $w(i) - n \in \langle \text{Ap}(S, n)\rangle \subset S$, lo que se contradice con la minimalidad de $w(i)$. Por tanto, se tiene que $m \in \text{Ap}(\langle \text{Ap}(S, n) + n\rangle, n)$. □

A continuación miremos al conjunto de las lagunas y a los invariantes relacionados con él.

Proposición 1.23 (Definición 1.1.8 en [11])**.** *Sea S un semigrupo numérico. Entonces para todo $k \in L(S)$ se tiene que si $k = a + b$ con $a, b \in \mathbb{N}$, o bien $a \in L(S)$ o bien $b \in L(S)$.*

Demostración. Supongamos que $k = a + b$ con $a, b \in \mathbb{N}$ tales que $a, b \in S$. Entonces $a + b \in S$, que es una contradicción con $k \notin S$. Por tanto al menos uno de a, b está en $L(S)$. □

Proposición 1.24 (Fórmula 2.6 en [16]). *Sea S un semigrupo numérico y sea $n \in S^*$. Entonces:*

1. $g(S) = \max(Ap(S,n)) - n$.
2. $l(S) = \dfrac{1}{n}\left(\displaystyle\sum_{w \in Ap(S,n)} w\right) - \dfrac{n-1}{2}$.

Para demostrar esto, recurriremos al siguiente lema.

Lema 1.25. *Sea S un semigrupo numérico, sea $n \in S^*$ y sea $Ap(S,n) = \{0, w(1), \dots, w(n-1)\}$. Escribiendo $w(i) = k_i n + i$ para cada $i = 1, \dots, n-1$ se tiene que*

$$L(S) = \{w(i) - kn \mid k = 1, \dots, k_i,\ i = 1, \dots, n-1\}. \tag{1.6}$$

Además,

$$l(S) = \sum_{i=1}^{n-1} k_i = \sum_{i=1}^{n-1} \left\lfloor \frac{w(i)}{n} \right\rfloor . \tag{1.7}$$

Demostración. En primer lugar, observemos que por la definición de $w(i)$ dada en la Proposición 1.7 podemos escribir $w(i) = k_i n + i$ para cada $i = 1 \dots, n-1$. Además, por la minimalidad de $w(i)$ se tiene que $w(i) - kn \in L(S)$ para todo $k = 1, \dots, k_i$. Como hay un $w(i)$ para cada clase módulo n distinta de 0 y toda laguna es congruente con un $i \neq 0$ módulo n (ya que todos los elementos congruentes con 0 módulo n están en el semigrupo numérico) se tiene que $L(S) = \{w(i) - kn \mid k = 1, \dots, k_i,\ i = 1, \dots, n-1\}$. De aquí se deduce inmediatamente que $l(S) = \sum_{i=1}^{n-1} k_i = \sum_{i=1}^{n-1} \left\lfloor \frac{w(i)}{n} \right\rfloor$. □

Demostración de la Proposición 1.24. Para la primera expresión, observemos en primer lugar que $g(S) \in \mathrm{Ap}(S,n) - n$, puesto que $g(S) \notin S$ y además $g(S) + n \in S$ por ser $g(S)$ el mayor elemento del conjunto de lagunas (si no, el número de Frobenius sería $g(S) + n$ en lugar de $g(S)$). Además como $(\mathrm{Ap}(S,n) - n) \setminus \{-n\} \subset L(S)$ y $g(S)$ es el máximo de $L(S)$, se tiene que necesariamente $g(S) = \max(\mathrm{Ap}(S,n)) - n$.
Para la segunda expresión, escribimos $\mathrm{Ap}(S,n) = \{0, w(1), \dots, w(n-1)\}$ como en la Proposición 1.7. Primero probemos el caso n impar. Se tiene que $\sum_{w \in \mathrm{Ap}(S,n)} w$ tiene $n-1$ sumandos no nulos, todos ellos de la forma $w(i)$ con $i = 1, \dots n-1$. Agrupamos los sumandos de $\sum_{w \in \mathrm{Ap}(S,n)} w = \sum_{i=1}^{n-1} w(i)$ en $\frac{n-1}{2}$ parejas de la forma $\{w(i), w(j)\}$ tales que $i + j = n$. Sumando cada pareja y usando la ecuación (1.6), obtenemos $w(i) + w(j) = k_i n + i + k_j n + j = (k_i + k_j)n + n$. Por tanto $\sum_{w \in \mathrm{Ap}(S,n)} w = n\left(\sum_{i=1}^{n-1} k_i + \frac{n-1}{2}\right)$. Usando la ecuación (1.7) obtenemos $l(S) = \frac{1}{n}\sum_{w \in \mathrm{Ap}(S,n)} w - \frac{n-1}{2}$.
Por último probaremos el caso n par. En este caso tenemos $\frac{n-2}{2}$ parejas como las anteriores, mientras que el elemento $w\left(\frac{n}{2}\right)$ quedará desemparejado. De nuevo, la suma de cada pareja será de la forma $w(i) + w(j) = k_i n + i + k_j n + j = (k_i + k_j)n + n$, mientras que $w\left(\frac{n}{2}\right) = k_{n/2} n + \frac{n}{2}$. Por tanto $\sum_{w \in \mathrm{Ap}(S,n)} w = n\left(\sum_{i=1}^{n-1} k_i + \frac{n-2}{2} + \frac{1}{2}\right) = n\left(\sum_{i=1}^{n-1} k_i + \frac{n-1}{2}\right)$, de modo que $l(S) = \frac{1}{n}\sum_{w \in \mathrm{Ap}(S,n)} w - \frac{n-1}{2}$. □

De estas dos expresiones, la de mayor relevancia es la primera. No obstante, no debemos interpretarla como una fórmula, sino más bien como una caracterización. Para obtener el conjunto de Apéry es necesario generar previamente el semigrupo numérico, y una vez generado es muy fácil encontrar el número de Frobenius. Por tanto, no facilita el proceso de hallar dicho invariante. Su importancia radica en que establece una relación formal entre un problema diofántico (pues recordemos que es esto lo que motiva la definición del número de Frobenius) y el campo de los semigrupos numéricos. En el segundo capítulo se estudiará la obtención de una fórmula explícita que devuelva el número de Frobenius.

Recordemos que los pseudo-números de Frobenius eran los $x \notin S$ tales que $x+s \in S$ para todo $s \in S^*$. Vamos a presentar algunas caracterizaciones que nos permitirán entender mejor este conjunto.

Proposición 1.26. *Sea S un semigrupo numérico. Definimos la siguiente relación en el conjunto de los enteros:*

$$a \leq_S b \Longleftrightarrow b - a \in S.$$

Se tiene que $\leq_S$ es una relación de orden.

Demostración. Veamos que $\leq_S$ es una relación de orden.

1. Reflexividad: $x - x = 0 \in S$ de modo que $x \leq_S x$.
2. Asimetría: Supongamos que $x \leq_S y$, $y \leq_S x$. Entonces $x - y \in S$ y $y - x = -(x - y) \in S$. Como $S \subset \mathbb{N}$, la única forma de que esto ocurra es que $y = x$.
3. Transitividad: Si $x \leq_S y$, $y \leq_S z$ se tiene que $z - y \in S$, $y - x \in S$. Por tanto $(z - y) + (y - x) = z - x \in S$, de modo que $x \leq_S z$.

□

Proposición 1.27 (Proposición 2.19 en [14]). *Sea S un semigrupo numérico. Entonces*

$$PF(S) = Maximales_{\leq_S}(\mathbb{Z}\backslash S). \tag{1.8}$$

Demostración. Sean $x \in \mathrm{PF}(S)$, $y \in \mathbb{Z}\backslash S$ tales que $x \neq y$. Si $x \leq_S y$, entonces $y - x \in S$. Como $x \in \mathrm{PF}(S)$, se tiene que $x + s \in S$ para todo $s \in S^*$. Por tanto $x + (y - x) = y \in S$, lo cual es una contradicción con $y \in \mathbb{Z}\backslash S$. Por tanto si $x \in \mathrm{PF}(S)$ entonces $x \in \mathrm{Maximales}_{\leq_S}(\mathbb{Z}\backslash S)$.

Para el otro contenido demostramos la formulación equivalente: si $x \notin \mathrm{PF}(S)$ entonces $x \notin \mathrm{Maximales}_{\leq_S}(\mathbb{Z}\backslash S)$. Sea $x \notin \mathrm{PF}(S)$; entonces o bien $x \in S$ o bien existe un $s \in S^*$ tal que $x + s \notin S$. Si $x \in S$, entonces $x \notin (\mathbb{Z}\backslash S)$ y por tanto $x \notin \mathrm{Maximales}_{\leq_S}(\mathbb{Z}\backslash S)$. Si existe $s \in S$ tal que $x + s \notin S$, entonces $x + s = l$ donde $l \in \mathbb{Z}\backslash S$. Por tanto $l - x = s$, de modo que $x \leq_S l$, y por tanto $x \notin \mathrm{Maximales}_{\leq_S}(\mathbb{Z}\backslash S)$.

□

De hecho, podemos probar un resultado más fuerte.

Corolario 1.28. *Sea S un semigrupo numérico. Entonces*

(1.9)
$$PF(S) = \begin{cases} Maximales_{\leq_S}(\mathbb{N}\backslash S) & si\ S \neq \mathbb{N} \\ \{-1\} & si\ S = \mathbb{N} \end{cases}$$

Demostración. Basta ver que si $S \neq \mathbb{N}$ entonces $\mathrm{PF}(S) \subset \mathbb{N}$, puesto que en el ejemplo 1.17 ya vimos que $\mathrm{PF}(\mathbb{N}) = \{-1\}$. Sea x un entero positivo tal que $-x \in \mathrm{PF}(S)$. Entonces se tiene que $s - x \in S$ para todo $s \in S^*$. Como $S \subset \mathbb{N}$, ningún entero menor que x puede pertenecer al semigrupo numérico. Por tanto, tampoco pueden hacerlo los enteros $x+1, \ldots, x+(x-1)$. Iterando, obtenemos que ningún entero de la forma $ax+b$ puede pertenecer a S, donde $a \in \mathbb{N}$, $b = 1, \ldots, x-1$. Por tanto, el complementario de S en $\mathbb{N}$ no es finito, lo cual es una contradicción con el hecho de que S es un semigrupo numérico. De este modo, se obtiene que si S es un semigrupo numérico propio, $\mathrm{PF}(S) = \mathrm{Maximales}_{\leq_S}(\mathbb{Z}\backslash S) \cap \mathbb{N} = \mathrm{Maximales}_{\leq_S}(\mathbb{N}\backslash S)$. □

Proposición 1.29 (Proposición 2.20 en [14])**.** *Sea S un semigrupo numérico y sea $n \in S^*$. Entonces:*

(1.10)
$$PF(S) = \{w - n \mid w \in Maximales_{\leq_S} Ap(S, n)\}.$$

Demostración. Sea $x \in \mathrm{PF}(S)$, es decir, $x \notin S$ y $x + s \in S$ para todo $s \in S^*$. Recordemos (Proposición 1.7) que $\mathrm{Ap}(S, n) = \{0, w(1), \ldots, w(n-1)\}$ con $w(i) = \min\{s \in S \mid s \equiv i \pmod{n}\}$ para cada $i = 1, \ldots, n-1$. Se tiene que $x \equiv j \pmod{n}$ para algún $j = 1, \ldots n-1$ (como en veces anteriores, no puede pertenecer a la clase del 0 porque todos los elementos de esta clase pertenecen al semigrupo numérico). Entonces $w(j) > x$, porque si $w(j) \leq x$, entonces $x = w(j) + kn$ para algún $k \in \mathbb{N}$ de modo que $x \in S$. Como $x \in \mathrm{PF}(S)$ se tiene que $x + n \in S$, de modo que $x + n = w(j)$ por la minimalidad de $w(j)$. Por tanto $x = w(j) - n$. Falta ver que $w(j)$ es maximal con respecto a $\leq_S$. Sean $x, y \in \mathrm{PF}(S)$ distintos, de modo que $x + n = w(j)$ y $y + n = w(k)$. Se tiene que $w(j) \not\leq_S w(k)$ porque de lo contrario sería $w(k) - w(j) = (y+n) - (x+n) = y - n \in S$ lo cual implicaría $x \leq_S y$ y esto no puede ser por la caracterización dada en la Proposición 1.27. Por tanto $\mathrm{PF}(S) \subset \{w - n \mid w \in \mathrm{Maximales}_{\leq_S}\mathrm{Ap}(S, n)\}$.
Para el otro contenido, por la Proposición 1.27 basta ver que

$$\mathrm{Maximales}_{\leq_S}(\mathbb{Z}\backslash S) \supset \{w - n \mid w \in \mathrm{Maximales}_{\leq_S}\mathrm{Ap}(S, n)\}.$$

Sea $x = w - n$ con $w \in \mathrm{Maximales}_{\leq_S}\mathrm{Ap}(S, n)$. Supongamos que existe $y \in \mathbb{Z}\backslash S$ tal que $x \leq_S s$. Usando la ecuación (1.6), podemos escribir $y = w' - kn$ para ciertos $k \geq 1, w' \in \mathrm{Ap}(S, n)$. Por tanto,

$$\begin{aligned} x \leq_S y &\Longrightarrow w' - kn - w + n \in S \\ &\Longrightarrow w' - w - (k-1)n \in S \\ &\Longrightarrow w' - w \in S \\ &\Longrightarrow w \leq_S w'. \end{aligned}$$

Esto es una contradicción con $w \in \mathrm{Maximales}_{\leq_S}\mathrm{Ap}(S, n)$. Por tanto se tiene que $x \in \mathrm{Maximales}_{\leq_S}(\mathbb{Z}\backslash S)$. □

En este trabajo se proponen dos corolarios para este resultado. El segundo de ellos es el que consideramos más importante, al tratarse de una forma de caracterizar el conjunto de pseudo-números de Frobenius que no se ha podido encontrar en la literatura actual.

Corolario 1.30. *Sea S un semigrupo numérico y sea $n \in S^*$. Definimos*

$$\widetilde{Ap}(S,n) := \{w \mid w \in Ap(S,n)\backslash\{0\}, w + w' \notin Ap(S,n) \text{ para todo } w' \in \widehat{Ap}(S,n)\}.$$

Entonces se cumple que $\widetilde{Ap}(S,n) - n = PF(S,n)$.

Demostración. Basta ver que $\widetilde{\mathrm{Ap}}(S,n) = \mathrm{Maximales}_{\leq_S}\mathrm{Ap}(S,n)$, ya que luego restar n a ambos lados y aplicar la Proposición 1.29 nos da el resultado deseado. Para un contenido, tomamos $b \in \widetilde{\mathrm{Ap}}(S,n)$ y $w \in \mathrm{Ap}(S,n)$ con $w \neq b$. Supongamos que $b \leq_S w$ i.e. $w - b = s \in S^*$. Veamos que entonces $s \in \mathrm{Ap}(S,n)$. Se tiene que $s \in S$ luego solo falta ver que $s - n \notin S$. Ahora bien, $s - n = w - b - n = (w-n) - b = l - b$ donde $l \in L(S)$. Por tanto $l = b + (s-n)$ y como $b \in S$, por la Proposición 1.23 se tiene que $s - n \notin S$. Esto es una contradiccón con $b \in \widetilde{\mathrm{Ap}}(S,n)$ porque se tiene que $b + s = w$ con $w \in \mathrm{Ap}(S,n)$, $s \in \widehat{\mathrm{Ap}}(S,n)$. La contradicción viene dada por suponer que $b \leq_S w$. Por tanto $b \in \mathrm{Maximales}_{\leq_S}\mathrm{Ap}(S,n)$.
Para el otro contenido, sea $w \in \mathrm{Maximales}_{\leq_S}\mathrm{Ap}(S,n)$ y sea $w' \in \widehat{\mathrm{Ap}}(S,n)$. Si $w + w' = s \in \mathrm{Ap}(S,n)$ entonces $w' = s - w$ i.e. $w \leq_S s$, lo cual es una contradicción con $w \in \mathrm{Maximales}_{\leq_S}\mathrm{Ap}(S,n)$. Por tanto $w \in \widetilde{\mathrm{Ap}}(S,n)$. ☐

Corolario 1.31. *Sea S un semigrupo numérico y sea A un conjunto de generadores de S tal que $0 \notin A$. Entonces:*

$$PF(S) = \bigcap_{n \in S^*} (Ap(S,n) - n) = \bigcap_{a \in A} (Ap(S,a) - a) \tag{1.11}$$

Demostración. En primer lugar vamos a demostrar que $\mathrm{PF}(S) = \bigcap_{a\in A}(\mathrm{Ap}(S,a) - a)$. Para el primer contenido, sea $x \in \mathrm{PF}(S)$. Por la Proposición 1.29 esto implica que dado cualquier $n \in S^*$, $x \in \{w - n \mid w \in \mathrm{Maximales}_{\leq_S}\mathrm{Ap}(S,n)\}$. En particular, dado cualquier $a \in A$ se tiene que $x \in (\mathrm{Ap}(S,a) - a)$, de modo que $x \in \bigcap_{a\in A}(\mathrm{Ap}(S,a) - a)$. Para el otro contenido, probamos la formulación equivalente: si $x \notin \mathrm{PF}(S)$, entonces $x \notin \bigcap_{a\in A}(\mathrm{Ap}(S,a) - a)$. Sea $x \notin \mathrm{PF}(S)$; entonces o bien $x \in S$ o bien existe un $s \in S^*$ tal que $x + s \notin S$. Si $x \in S$, entonces $x \notin \bigcap_{a\in A}(\mathrm{Ap}(S,a) - a)$ porque $\bigcap_{a\in A}(\mathrm{Ap}(S,a) - a) \subset \mathbb{Z}\backslash S$ (por la definición del conjunto de Apéry). Supongamos ahora que existe $s \in S^*$ tal que $x + s \notin S$. Como A genera el semigrupo numérico, se tiene que $s = \sum_{a\in A} \lambda_a a$ con $\lambda_a \in \mathbb{N}$. Como $s \neq 0$, existe al menos un $\overline{a} \in A$ tal que

$\lambda_{\overline{a}} \geq 1$. Por tanto

$$
\begin{aligned}
x+s \notin S &\Longrightarrow x+\overline{a}+(\lambda_{\overline{a}}-1)\overline{a}+\sum_{a\in A, a\neq \overline{a}} \lambda_a a \notin S \\
&\overset{(*)}{\Longrightarrow} x+\overline{a} \notin S \\
&\Longrightarrow x+\overline{a} \notin \mathrm{Ap}(S,\overline{a})\ (\subset S) \\
&\Longrightarrow x \notin \mathrm{Ap}(S,\overline{a})-\overline{a} \\
&\Longrightarrow x \notin \bigcap_{a\in A}(\mathrm{Ap}(S,a)-a).
\end{aligned}
$$

La implicación $(*)$ es cierta porque $(\lambda_{\overline{a}}-1)\overline{a}+\sum_{a\in A, a\neq\overline{a}} \lambda_a a \in S$ al ser una combinación lineal de los generadores en la que los coeficientes están todos en $\mathbb{N}$. Si $x+\overline{a}\in S$ se tendría que la suma de estos dos términos estaría necesariamente en S, y por hipótesis no es así.
A continuación veamos que $\mathrm{PF}(S) \subset \bigcap_{n\in S}(\mathrm{Ap}(S,n)-n)$. De nuevo por la Proposición 1.29 se tiene que si $x \in \mathrm{PF}(S)$, entonces para todo $n \in S^*$, $x \in \{w-n \mid w \in \mathrm{Maximales}_{\leq_S}\mathrm{Ap}(S,n)\}$. En particular, se tiene que $x \in (\mathrm{Ap}(S,n)-n)$ para todo $n\in S^*$, de modo que $x \in \bigcap_{n\in S^*}(\mathrm{Ap}(S,n)-n)$.
Por otra parte, se tiene que $\bigcap_{n\in S^*}(\mathrm{Ap}(S,n)-n) \subset \bigcap_{a\in A}(\mathrm{Ap}(S,a)-a)$ puesto que en el objeto de la izquierda estamos intersecando al menos todos los conjuntos del objeto de la derecha, y posiblemente más. Por tanto se tiene que

$$
\begin{cases}
\mathrm{PF}(S) \subset \bigcap_{n\in S}(\mathrm{Ap}(S,n)-n) \subset \bigcap_{a\in A}(\mathrm{Ap}(S,a)-a) \\
\mathrm{PF}(S) = \bigcap_{a\in A}(\mathrm{Ap}(S,a)-a)
\end{cases}
$$

de lo cual se deduce que $\mathrm{PF}(S) = \bigcap_{n\in S^*}(\mathrm{Ap}(S,n)-n) = \bigcap_{a\in A}(\mathrm{Ap}(S,a)-a)$. □

Veamos un ejemplo de la construcción descrita en el corolario.

Ejemplo 1.32.

```
gap> S:=NumericalSemigroup(5,9,12);
<Numerical semigroup with 3 generators>
gap> PF:=PseudoFrobenius(S);
[ 13, 16 ]
gap> Ap5:=AperyList(S,5)-5;
[ -5, 16, 7, 13, 4 ]
gap> Ap9:=AperyList(S,9)-9;
[ -9, 1, 11, 3, 13, -4, 6, 16, 8 ]
gap> Ap12:=AperyList(S,12)-12;
[ -12, 13, 2, 3, 16, -7, 6, 7, 8, -3, -2, 11 ]
gap> I:=Intersection(Ap5,Ap9,Ap12);
[ 13, 16 ]
gap> I=PF;
true
```

Obsérvese que el menor número de conjuntos que necesitamos intersecar es exactamente el cardinal de $e(S)$; si tomamos menos conjuntos siempre obtendremos uno de los contenidos pero el otro puede no ocurrir, como sucede en el siguiente caso:

```
gap> Intersection(Ap5,Ap12);
[ 7, 13, 16 ]
```

El corolario 1.31 nos proporciona una forma alternativa a la que normalmente aparece en la literatura de demostrar la siguiente cota.

Corolario 1.33. *Si S es un semigrupo numérico propio, entonces $t(S) \leq m(S) - 1$.*

Demostración. Sea A el conjunto minimal de generadores de S. Como $\mathrm{PF}(S) = \bigcap_{a \in A}(\mathrm{Ap}(S,a) - a)$, en particular $\mathrm{PF}(S) \subset (\mathrm{Ap}(S,m(S)) - m(S))$ y por tanto $t(S) = |\mathrm{PF}(S)| \leq |\mathrm{Ap}(S,m(S)) - m(S)| = m(S)$. Además, $-a = \min(\mathrm{Ap}(S,a) - a)$ para todo $a \in A$, y de hecho si $a, a' \in A$, entonces $-a \in (\mathrm{Ap}(S,a') - a')$ si y solo si $a = a'$. Demostremos esta afirmación. Supongamos que $-a \in (\mathrm{Ap}(S,a') - a')$ con $a' \neq a$. Entonces $-a = w(i) - a'$ para algún $w(i) \neq 0$. Por tanto $a + w(i) = a'$ de modo que $a' \notin A$, lo cual es una contradicción con $a' \in A$. La otra implicación es trivial porque $0 \in \mathrm{Ap}(S,a)$. Esto prueba que $-m(S) \notin \bigcap_{a \in A}(\mathrm{Ap}(S,a) - a)$, de modo que de hecho $PF(S) \subset (\mathrm{Ap}(S,m(S)) - m(S)) \backslash \{-m(S)\}$. Por tanto

$$t(S) = |\mathrm{PF}(S)| \leq |(\mathrm{Ap}(S,m(S)) - m(S)) \backslash \{-m(S)\}| = m(S) - 1.$$

□

Veamos un ejemplo de por qué es importante la condición $S \neq \mathbb{N}$ en la anterior proposición.

Ejemplo 1.34.

```
gap> N:=NumericalSemigroup(1); #Conjunto de los números naturales
<The numerical semigroup N>
gap> PseudoFrobenius(N);
[ -1 ]
gap> Multiplicity(N);
1
gap> Type(N);
1
gap> Type(N)<=Multiplicity(N)-1;
false
```

Lo que no es aplicable de la demostración anterior a este caso particular es el hecho de que suponíamos que había dos generadores diferentes, lo que nos permitía eliminar el elemento $-a$ de la intersección para todo $a \in A$. Sin embargo, aquí un elemento basta para generar todo el conjunto, de modo que no podemos descartar ningún elemento de la intersección.

Se tiene además que $t(S) \geq 1$, porque $g(S) \in \mathrm{PF}(S)$, puesto que $g(S) + s \in S$ para todo $s \in S^*$ por ser $g(S)$ el mayor elemento del conjunto de lagunas.

Proposición 1.35 (Proposición 10 en [1]). *Sea S un semigrupo numérico. Entonces*

$$l(S) \geq \frac{g(S)+t(S)}{2} \tag{1.12}$$

Demostrar esta proposición requiere un lema previo que relaciona los invariantes ya vistos con el conjunto de números esporádicos.

Lema 1.36. *Sea S un semigrupo numérico. Entonces $n(S) + l(S) = c(S)$.*

Demostración. Hay $g(S) + 1$ enteros no negativos menores o iguales que $g(S)$. Cada uno de ellos pertenece a $N(S)$ o a $L(S)$ (pero no a ambos, al ser conjuntos disjuntos por definición). Como además $\text{máx}\, N(S) < \text{máx}\, L(S) = g(S)$, se tiene que $n(S) + l(S) = g(S) + 1 = c(S)$. □

Demostración de la Proposición 1.35 [1]. Construimos el conjunto $H = \{g(S)-n | n \in N(S) \cup \mathrm{PF}(S) \backslash g(S)\}$. Por una parte, si $n \in N(S)$ no puede darse $g(S) - n = s \in S$, porque entonces se tendría $s + n = g(S) \in S$, lo cual es una contradicción. Por otra parte, si $n \in \mathrm{PF}(S) \backslash g(S)$ tampoco puede ser $g(S) - n \in S$ por la caracterización de los pseudo-números de Frobenius dada en la Proposición 1.27. Se tiene entonces que $H \subset L(S)$. Por tanto $n(S) + t(S) - 1 = |H| \leq l(S)$. Por otra parte, por el Lema 1.36 se tiene que $g(S) - n(S) + 1 = l(S)$. Sumando ambas ecuaciones se tiene que $g(S) + t(S) \leq 2l(S)$, de modo que $l(S) \geq \frac{g(S)+t(S)}{2}$. □

De todos los invariantes que hemos presentado a lo largo de la sección, los que más se estudian actualmente son el género y los pseudo-números de Frobenius (incluido el propio número de Frobenius). Como la segunda parte del trabajo se centra exclusivamente en los invariantes de Frobenius, a continuación se presenta un problema abierto relacionado con el género de los semigrupos numéricos, a fin de ilustrar uno de los posibles caminos que se podría tomar para ampliar este trabajo.

Denotamos por n_l al número de semigrupos numéricos que tienen género l. Uno de los problemas más estudiados en el campo de los semigrupos numéricos es si existen más semigrupos numéricos con género $l + 1$ que con género l. Durante muchos años se ha conjeturado que $n_{l+1} \geq n_l$. Esta conjetura se sabe verdadera para $l \leq 67$, pero sigue abierta en general. En 2008, María Brás-Amorós conjeturó un enunciado más fuerte:

Conjetura ([2]).

1. $n_l \geq n_{l-1} + n_{l-2}$.
2. $\text{lím}_{l\to\infty} \frac{n_{l-1}+n_{l-2}}{n_l} = 1$.
3. $\text{lím}_{l\to\infty} \frac{n_l}{n_{l-1}} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ *(el número de oro).*

Observemos que el segundo apartado de la conjetura implica que n_l se comporta asintóticamente como la sucesión de Fibonacci. Para llegar a este resultado, Brás-Amorós estudió n_l hasta $l = 50$, valor para el cual se obtiene que

$$\frac{n_{l-1} + n_{l-2}}{n_l} = 0{,}99377 \quad \text{y} \quad \frac{n_l}{n_{l-1}} = 1{,}62525.$$

CAPÍTULO 2

Invariantes de Frobenius.

En esta segunda parte del trabajo estudiaremos más a fondo los invariantes de Frobenius; el número de Frobenius, los pseudo-números de Frobenius y el tipo. La dividiremos en dos bloques: en el primero, dado un semigrupo numérico trataremos de hallar una fórmula explícita para los invariantes de Frobenius. En la segunda dado un conjunto de números veremos si pueden existir semigrupos numéricos para los cuales ese sea su conjunto de pseudo-números de Frobenius.

2.1. Fórmula para los invariantes de Frobenius.

2.1.1. Dos generadores.

En este apartado supondremos que a_1, a_2 son enteros positivos tales que $a_1 < a_2$.

Proposición 2.1 (Proposición 2.13 en [14])**.** *Sea* $S = \langle a_1, a_2 \rangle$ *un semigrupo numérico. Entonces*

$$g(S) = a_1a_2 - a_1 - a_2. \tag{2.1}$$

Demostración. En primer lugar, por la Proposición 1.7 se tiene que $\mathrm{Ap}(S, a_1) = \{0, a_2, 2a_2, \ldots, (a_1 - 1)a_2\}$. Veamos esto con más detalle. Por una parte, se tiene que dos elementos de la forma xa_2, ya_2 donde $x \neq y$, $0 \leq x, y \leq (a_1 - 1)$ pertenecen a clases módulo a_1 diferentes. Si fuera $xa_2 \equiv ya_2$ entonces $a_1 | a_2(x - y)$ y como a_1 y a_2 son coprimos, necesariamente $a_1|(x - y)$, lo que implica $x = y$. Por otra parte, $\mathrm{Ap}(S, a_1)$ tiene a_1 elementos, y con el método descrito hemos construido a_1 clases de equivalencia distintas. Por tanto $\mathrm{Ap}(S, a_1) = \{0, a_2, 2a_2, \ldots, (a_1 - 1)a_2\}$.
Usando ahora la Proposición 1.24, tenemos que $g(S) = \text{máx}(\mathrm{Ap}(S, a_1)) - a_1 = (a_1 - 1)a_2 - a_1 = a_1a_2 - a_1 - a_2$. □

Proposición 2.2. *Sea* $S = \langle a_1, a_2 \rangle$ *un semigrupo numérico. Entonces* $t(S) = 1$.

Demostración. Por la caracterización de la Proposición 1.29 se tiene que $\mathrm{PF}(S) = \{w - a_1 \mid w \in \mathrm{Maximales}_{\leq_S} \mathrm{Ap}(S, a_1)\}$. Sean $w_1, w_2 \in \mathrm{Maximales}_{\leq_S} \mathrm{Ap}(S, a_1)$, y supongamos que $w_1 \geq w_2$. Entonces $w_1 = k_1a_2$ y $w_2 = k_2a_2$ con $0 \leq k_i \leq a_1 - 1$. De este modo $w_1 - w_2 = (k_1 - k_2)a_2 \in \mathrm{Ap}(S, a_1) \subset S$, porque $0 \leq k_1 - k_2 \leq a_1 - 1$. Por tanto, por la maximalidad de w_1, w_2 necesariamente ha de ser $w_1 = w_2$, de modo que $t(S) = 1$. $\square$

2.1.2. Tres generadores.

El cálculo de los pseudo-números de Frobenius de un semigrupo numérico de dimensión 3 es más complejo. En 1990, Frank Curtis [4] demostró que para los semigrupos numéricos con tres generadores (no necesariamente de dimensión 3) no existe una fórmula dada por un polinomio que devuelva el número de Frobenius. De hecho, probó un resultado más fuerte.

Teorema 2.3. *[4] Sea $A = \{(a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{N}^3 | a_1 < a_2 < a_3, (a_1, a_2) = 1$ y $a_1, a_2 \not| a_3\}$. Entonces no existe un polinomio no nulo $H \in \mathbb{C}[X_1, X_2, X_3, Y]$ tal que*

$$H(a_1, a_2, a_3, g(a_1, a_2, a_3)) = 0 \text{ para todo } (a_1, a_2, a_3) \in A.$$

Observemos que este resultado es más fuerte porque la condición de $(a_1, a_2) = 1$ es suficiente (pero no necesaria) para que $\langle a_1, a_2, a_3 \rangle$ sea un semigrupo numérico. A es por tanto un subconjunto del conjunto de semigrupos numéricos con tres generadores, y si no existe un polinomio que se anule bajo esas condiciones en A, tampoco puede existir en todo el conjunto de semigrupos numéricos con tres generadores.

La demostración de este teorema no se incluye en el trabajo ya que requiere de técnicas de geometría proyectiva que se alejan mucho del tema que estamos tratando. Sin embargo, el artículo [4] se dedica exclusivamente a esta prueba.

Como consecuencia del resultado de Curtis, para semigrupos numéricos con más de tres generadores tampoco puede existir una fórmula dada por un polinomio que devuelva el número de Frobenius. Esto es porque si $\mathcal{S}_n$ es el conjunto de semigrupos numéricos con n generadores y existiese dicha fórmula para $\mathcal{S}_k$ con $k > 3$, entonces $\mathcal{S}_3 = \{\langle a_1, \ldots, a_k \rangle \in \mathcal{S}_k \,|\, a_3 = \ldots = a_k\}$, de modo que también existiría dicha fórmula para $\mathcal{S}_3$ y por tanto para $A \subset \mathcal{S}_3$, pero sabemos que en A esta fórmula no existe.

El siguiente corolario afirma que tampoco es posible dividir $\mathcal{S}_3$ en un número finito de subconjuntos y asociar a cada uno un polinomio que devuelva el número de Frobenius en cada elemento de dicho subconjunto.

Corolario 2.4. *[4] No existe un conjunto finito de polinomios $\{h_1, \ldots h_n\}$ tal que para cada elección de a_1, a_2, a_3 con $(a_1, a_2, a_3) = 1$ existe un i tal que $h_i(a_1, a_2, a_3) = g(a_1, a_2, a_3)$.*

Demostración. [4] Definimos $H(X_1, X_2, X_3, Y) = \prod_{i=1}^{n}(h_i(X_1, X_2, X_3) - Y)$. Entonces $H(a_1, a_2, a_3, g(a_1, a_2, a_3)) = 0$ para todo $(a_1, a_2, a_3) \in A$, y esto se contradice con el Teorema 2.3. $\square$

Sin embargo, esto no implica que no podamos encontrar subconjuntos de $\mathcal{S}_3$ para los cuales sí que exista un polinomio que devuelva el número de Frobenius. $\{(a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{N}^3 \,|(a_1, a_2) = 1, a_3 = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2, \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{N}\backslash\{0\}\}$ y $\{(a_1, a_2, a_3) \in$

$\mathbb{N}^3 \,|a_1 = 2, a_2 = 3, a_3 > a_2\}$ son algunos ejemplos de estos conjuntos, a los que asociaríamos los polinomios $H_1(X_1, X_2, X_3, Y) = X_1X_2 - X_1 - X_2 - Y$ y $H_2(X_1, X_2, X_3, Y) = 1 - Y$ respectivamente. De hecho, uno de los problemas en torno a los que más literatura se ha producido en el campo de los semigrupos numéricos es el de hallar dicho polinomio para ciertos subconjuntos de $\mathcal{S}_k$ (de mayor interés matemático que los ejemplos que se acaban de presentar), ya no solo para $k = 3$ sino también para $k \geq 3$.

A pesar de no poder encontrar una fórmula como la descrita en el Teorema 2.3 que devuelva el número de Frobenius, es posible encontrar una fórmula explícita que devuelva no solo el número de Frobenius, sino también los pseudo-números de Frobenius para semigrupos numéricos con tres generadores. Para ello, trabajaremos con $(a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{N}^3$ tales que $a_1 < a_2 < a_3$ son coprimos dos a dos. Esta hipótesis no es restrictiva debido a la siguiente proposición.

Proposición 2.5. *Sea S un semigrupo numérico cuyo conjunto minimal de generadores es $\{n_1, \ldots, n_r\}$. Sea $d = \gcd\{n_1, \ldots, n_{r-1}\}$ y sea $S' = \left\langle \frac{n_1}{d}, \ldots, \frac{n_{r-1}}{d}, n_r \right\rangle$. Entonces*

$$Ap(S, n_r) = dAp(S', n_r). \tag{2.2}$$

Además,

$$g(S) = dg(S') + (d-1)n_r \quad y \quad PF(S) = dPF(S') + (d-1)n_r. \tag{2.3}$$

Demostración. Empezamos probando (2.2). Por la Proposición 1.7 podemos escribir $\mathrm{Ap}(S, n_r) = \langle 0, w(1), \ldots, w(n_r - 1)\rangle$ y $\mathrm{Ap}(S', n_r) = \langle 0, w'(1), \ldots, w'(n_r - 1)\rangle$. Sea $w(i) = \lambda_1 n_1 + \ldots + \lambda_{r-1} n_{r-1}$ (obsérvese que el término $\lambda_r n_r$ no es necesario por la minimalidad de $w(i)$). Definimos la siguiente aplicación:

$$\begin{aligned} f\colon \mathrm{Ap}(S, n_r) &\longrightarrow \mathbb{N} \\ w(i) &\longmapsto \frac{w(i)}{d}. \end{aligned}$$

Queremos ver que de hecho $f(\mathrm{Ap}(S, n_r)) = \mathrm{Ap}(S', n_r)$. En primer lugar, observemos que $f(w_i) = \frac{w(i)}{d} \in S'$. En segundo lugar, $f(w_i) \equiv j \pmod{n_r}$ con j posiblemente distinto de i. Si hubiese un elemento $s_j \in S'$ congruente con $j \pmod{n_r}$ tal que $s_j < \frac{w(i)}{d}$, se tendría que $ds_j \in S$, porque si $s_j = \sum_{i=1}^{r-1} \lambda'_i \frac{n_i}{d} + \lambda'_r n_r \in S'$ entonces $ds_j = \sum_{i=1}^{r-1} \lambda'_i n_i + d\lambda'_r n_r \in S$. Entonces sería $ds_j \equiv i \pmod{n_r}$, pero $ds_j < w(i)$, lo cual se contradice con la minimalidad de $w(i)$. Por tanto $f(w(i)) = w'(j)$. Esto implica que la aplicación $f(x) := \frac{x}{d}$ manda cada $w(i)$ a un $w'(j)$ i.e. $f(\mathrm{Ap}(S, n_r)) \subset \mathrm{Ap}(S', n_r)$. Además f es inyectiva y al actuar sobre conjuntos finitos del mismo cardinal, es también biyectiva. De este modo se tiene que $f(\mathrm{Ap}(S, n_r)) = \mathrm{Ap}(S', n_r)$ o lo que es equivalente, $\mathrm{Ap}(S, n_r) = d\mathrm{Ap}(S', n_r)$.
Demostremos ahora (2.3). Por la Proposición 1.24 se tiene que $g(S) = \max(\mathrm{Ap}(S, n_r)) - n_r$, mientras que $g(S') = \max(\mathrm{Ap}(S', n_r)) - n_r$. Por otra parte, $d\mathrm{Ap}(S', n_r) = \mathrm{Ap}(S, n_r)$. De este modo, $g(S) + n_r = d(g(S') + n_r)$ y por tanto $g(S) = dg(S') + (d-1)n_r$.
Para demostrar $\mathrm{PF}(S) = d\mathrm{PF}(S') + (d-1)n_r$, primero probaremos que

$$f\left(\mathrm{Maximales}_{\leq_S}(\mathrm{Ap}(S, n_r))\right) = \mathrm{Maximales}_{\leq_{S'}}(\mathrm{Ap}(S', n_r)),$$

donde f es la función definida en la demostración de (2.2) (recordemos que es biyectiva, luego tiene inversa). Supongamos que $w(i) \in \text{Maximales}_{\leq_S}(\text{Ap}(S, n_r)$, y $f(w(i)) = w'(j) \notin \text{Maximales}_{\leq_{S'}}(\text{Ap}(S', n_r)$. Entonces existe un $w'(k) \in \text{Ap}(S', n_r)$ tal que $w'(j) \leq_{S'} w'(k)$ i.e. $w'(k) - w'(j) \in S'$. Suponiendo que $f^{-1}(w'(k)) = w(t)$, se tiene que $\frac{w(t)}{d} - \frac{w(i)}{d} \in S'$ de modo que $w(i) - w(t) \in dS' \subset S$[1], y por tanto $w(i) \leq_S w(t)$, lo que se contradice con $w(i) \in \text{Maximales}_{\leq_S}(\text{Ap}(S, n_r)$. Con esto hemos visto que $f\left(\text{Maximales}_{\leq_S}(\text{Ap}(S, n_r))\right) \subset \text{Maximales}_{\leq_{S'}}(\text{Ap}(S', n_r))$. Para el otro contenido tomamos $w'(j) \in \text{Maximales}_{\leq_{S'}}(\text{Ap}(S', n_r))$, y $w(i) = f^{-1}(w'(j))$. Supongamos que existe un $w(t) \in \text{Ap}(S, n_r)$ tal que $w(i) \leq_S w(i)$ i.e. $w(t) - w(i) = s \in S$. Por tanto $\frac{w(t)}{d} - \frac{w(i)}{d} = \frac{s}{d} \in S'$[2]. Denotando $w'(k) = f(w(t))$ tenemos que $w'(j) \leq_{S'} w'(k)$, lo cual es una contradicción con la maximalidad de $w'(j)$. Por tanto hemos probado el otro contenido. De este modo, se tiene que $\text{Maximales}_{\leq_S}(\text{Ap}(S, n_r)) = d\text{Maximales}_{\leq_{S'}}(\text{Ap}(S', n_r))$. Restando n a ambos lados y aplicando la Proposición 1.29 obtenemos el resultado deseado. $\square$

Por tanto, si tenemos un semigrupo numérico con tres generadores que no son coprimos, realizamos las reducciones necesarias y calculamos los pseudo-números de Frobenius del semigrupo numérico en el que los generadores sí que son coprimos dos a dos. Luego utilizamos la fórmula (2.3) para calcular los pseudo-números de Frobenius del semigrupo numérico original. Por tanto, a partir de ahora supondremos que a_1, a_2 y a_3 son enteros coprimos dos a dos.

Comenzamos ahora con la descripción del procedimiento. En primer lugar, definimos para cada $i \in \{1, 2, 3\}$

$$c_i = \min\{k \in \mathbb{N}\backslash\{0\} \mid ka_i \in \langle\{a_1, a_2, a_3\}\backslash\{a_i\}\rangle\}.$$

De este modo, existen enteros no negativos $r_{12}, r_{13}, r_{21}, r_{23}, r_{31}, r_{32}$ tales que

$$\left\{\begin{array}{l} c_1 a_1 = r_{12} a_2 + r_{13} a_3. \\ c_2 a_2 = r_{21} a_1 + r_{23} a_3. \\ c_3 a_3 = r_{31} a_1 + r_{32} a_2. \end{array}\right. \tag{2.4}$$

Observemos primero que $c_1, c_2 \neq 1$ porque $a_1 < a_2 < a_3$ son coprimos dos a dos y los r_{jk} son no negativos. Si $c_3 = 1$ entonces $\langle a_1, a_2, a_3\rangle = \langle a_1, a_2\rangle$ de modo que podemos concluir que $g(\langle a_1, a_2, a_3\rangle) = \text{PF}(\langle a_1, a_2, a_3\rangle) = a_1 a_2 - a_1 - a_2$. Por tanto, de ahora en adelante supondremos que $c_3 \neq 1$ (i.e., $\{a_1, a_2, a_3\}$ es un conjunto minimal de generadores). Veamos algunas propiedades de los c_i y los r_{jk}.

Lema 2.6 (Lema 1 en [15]). *Se tiene que $r_{12}, r_{13}, r_{21}, r_{23}, r_{31}, r_{32}$ son estrictamente positivos.*

Demostración. [15] Supongamos por ejemplo que $r_{13} = 0$. Entonces la primera ecuación de (2.4) se queda en $c_1 a_1 = r_{12} a_2$. Como $a_2 | a_1 c_1$ y $(a_1, a_2) = 1$, necesariamente

[1] Aquí dS' no es un semigrupo numérico (el máximo común divisor de sus generadores es $d \neq 1$), sino que es un submonoide de $(\mathbb{N}, +)$.

[2] Observemos que $\frac{s}{d} \in S'$ porque como vimos al principio de la demostración, en la expresión de los elementos del conjunto de Apéry no aparece n_r. Por tanto $\frac{s}{d} = \sum_{i=1}^{r-1} \mu_i \frac{n_i}{d} \in S'$.

$a_2|c_1$, luego $a_2 \leq c_1$. Además, por definición de c_1 se tiene que $c_1 \leq a_2$. Por tanto, $c_1 = n_2$.
Por otra parte, como $(a_1, a_2) = 1$ se tiene que $a_1 \in \mathcal{U}(\mathbb{Z}/a_2\mathbb{Z})$, de modo que existe un elemento $a_1^{-1} \in \mathbb{Z}/a_2\mathbb{Z}$ tal que $a_1 a_1^{-1} \equiv 1 \pmod{a_2}$. Se puede escribir entonces

$$a_3 \equiv \underbrace{(a_3 a_1^{-1})}_{x} a_1 \pmod{a_2},$$

donde podemos elegir un x tal que $1 \leq x \leq a_2 - 1$. Por tanto $xa_1 = a_3 + za_2$ para algún $z \in \mathbb{Z}$. Veamos ahora que $z \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$. Supongamos que no; entonces $xa_1 - za_2 = a_3$ y por tanto $\{a_1, a_2, a_3\}$ no es un conjunto minimal de generadores, lo cual es una contradicción. Por tanto, como $xa_1 = a_3 + za_2$ con $z \geq 1$ se tiene que $xa_1 \in \langle a_2, a_3 \rangle$, de modo que $x \geq c_1$. Además ya hemos visto que $x < a_2$, y uniendo estas dos desigualdades obtenemos $c_1 \leq x < a_2$, lo cual es una contradicción con $c_1 = a_2$. De este modo, $r_{13} > 0$. De modo similar se puede ver que el resto de r_{ij} también son estrictamente positivos. □

Lema 2.7 (Lema 2 en [15]). *Si $j \neq i$, entonces $r_{ji} < c_i$.*

Demostración. Supongamos que $c_1 \leq r_{21}$. Entonces existen enteros $q \geq 1$ y $0 \leq s < c_1$ tales que $r_{21} = qc_1 + s$. Usando la primera ecuación de (2.4) y esta igualdad, obtenemos que $r_{21}a_1 = qr_{12}a_2 + qr_{13}a_3 + sa_1$. Por otra parte, de la segunda ecuación de (2.4) tenemos que $r_{21}a_1 = c_2a_2 - r_{23}a_3$. Uniendo ambas igualdades:

$$qr_{12}a_2 + qr_{13}a_3 + sa_1 = c_2a_2 - r_{23}a_3 \Longrightarrow (c_2 - qr_{12})a_2 = sa_1 + (qr_{13} + r_{23})a_3.$$

Como $(qr_{13} + r_{23}) > 0$ (por el Lema 2.6) y $s \geq 0$, se tiene que $(c_2 - qr_{12})a_2 \in \langle a_1, a_3 \rangle \backslash \{0\}$, y como $qr_{12} > 0$ (de nuevo por el Lema 2.6), esto es una contradicción con la minimalidad de c_2. Por tanto necesariamente $c_1 > r_{12}$. De la misma forma se ve con el resto de coeficientes. □

Una vez vistos estos lemas, ya estamos en condiciones de enunciar y probar el teorema que nos dará una expresión para el conjunto de pseudo-números de Frobenius de un semigrupo numérico de dimensión 3.

Teorema 2.8. *Para cada $\{i, j, k\} = \{1, 2, 3\}$ se tiene que*

$$\textit{Maximales}_{\leq_S}(Ap(S, a_i)) = \{(c_j - 1)a_j + (r_{ik} - 1)a_k, (c_k - 1)a_k + (r_{ij} - 1)a_j\}. \tag{2.5}$$

Demostración. Demostraremos el teorema para $i = 1$. Para el resto de casos se prueba de forma análoga.
En primer lugar, veremos que $w_1 = (c_3 - 1)a_3 + (r_{12} - 1)a_2$ y $w_2 = (c_2 - 1)a_2 + (r_{13} - 1)a_3$ pertenecen a $\mathrm{Ap}(S, a_1)$. Supongamos que w_1 no pertenece a dicho conjunto. Por la Proposición 1.8, esto es equivalente a que existan $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{N}$ con $\lambda_1 \neq 0$ tales que $w_1 = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \lambda_3 a_3$. Reorganizando términos obtenemos que

$$((c_3 - 1) - \lambda_3)a_3 = \lambda_1 a_1 + (\lambda_2 - (r_{12} - 1))a_2$$

y por la minimalidad de c_3 sabemos que $((c_3-1)-\lambda_3)a_3 \notin \langle a_1, a_2\rangle\backslash\{0\}$, de modo que necesariamente $\lambda_2 < r_{12}-1$ (obsérvese que no puede ser $\lambda_2 = r_{12}-1$ y $\lambda_3 = c_3-1$ por $\lambda_1 \neq 0$). Reorganizando términos de nuevo obtenemos que

$$((r_{12}-1)-\lambda_2)a_2 = \lambda_1 a_1 + (\lambda_3 - (c_3-1))a_3.$$

Por el Lema 2.7 se tiene que $r_{12} < c_2$, y por la minimalidad de c_2 sabemos que $((r_{12}-1)-\lambda_2)a_2 \notin \langle a_1, a_3\rangle\backslash\{0\}$. Por tanto necesariamente $\lambda_3 < c_3-1$ (de nuevo, no puede ser $\lambda_3 = c_3-1$ y $r_{12}-1 = \lambda_2$ por $\lambda_1 \neq 0$). Reorganizamos términos una vez más para obtener que

$$\lambda_1 a_1 = ((c_3-1)-\lambda_3)a_3 + ((r_{12}-1)-\lambda_2)a_2. \tag{2.6}$$

Como $c_3-1 > \lambda_3$, $r_{12}-1 > \lambda_2$ se tiene que $\lambda_1 \geq c_1$ i.e. $\lambda_1 = qc_1 + r$ con $q \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$, $0 \leq r < c_1$. Usando la primera ecuación de (2.4) y esta igualdad podemos escribir $\lambda_1 a_1 = qr_{12}a_2 + qr_{13}a_3 + ra_1$. Sustituyendo esta expresión en la ecuación (2.6) y reorganizando términos, obtenemos

$$(c_3 - 1 - \lambda_3 - qr_{13})a_3 = ra_1 + (qr_{12} - r_{12} + 1 + \lambda_2)a_2.$$

Obsérvese que $r \in \mathbb{N}$ y que $qr_{12}-r_{12}+1+\lambda_2 = (q-1)r_{12}+1+\lambda_2 \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$. Por tanto, $(c_3 - 1 - \lambda_3 - qr_{13})a_3 \in \langle a_1, a_3\rangle\backslash\{0\}$ lo cual es una contradicción con la minimalidad de c_3, que viene dada por suponer que $w_1 \notin \mathrm{Ap}(S, a_1)$. Por tanto necesariamente $w_1 \in \mathrm{Ap}(S, a_1)$. De modo similar se prueba que $w_2 \in \mathrm{Ap}(S, a_1)$.
Ahora queda ver que w_1, w_2 son los únicos elementos maximales de $\mathrm{Ap}(S, a_1)$ con respecto a la relación de orden $\leq_S$. Sea $s \in \mathrm{Ap}(S, a_1)$. Por la Proposición 1.8, $s = xa_2 + ya_3$ para ciertos $x, y \in \mathbb{N}$. Primero veamos que $x \leq c_2-1$ e $y \leq c_3-1$. Si fuese $x \geq c_2$, usando la segunda ecuación de (2.4) tengo que $s = xa_2 + ya_3 = r_{21}a_1 + (x - c_2)a_2 + (r_{23}+y)a_3$ con $r_{21} > 0$ (por el Lema 2.6) y $x - c_2 \geq 0, r_{23} + y \geq 0$. Pero entonces por la Proposición 1.8 se tiene que $s \notin \mathrm{Ap}(S, a_1)$ lo cual es una contradicción. Del mismo modo se prueba que $y \leq c_3-1$.
En segundo lugar, veamos que o bien $x \leq r_{12}-1$ e $y \leq c_3-1$ o bien $x \leq c_2-1$ e $y \leq r_{13}-1$. Supongamos que no se cumple la primera de las condiciones. Como ya hemos visto que $y \leq c_3-1$, tendrá que ser $r_{12} \leq x \leq c_2-1$. Queremos probar que en estas condiciones, $y \leq r_{13}-1$. Si fuese $y \geq r_{13}$, se tendría

$$\begin{aligned} xa_2 + ya_3 &= r_{12}a_2 + r_{13}a_3 + (x-r_{12})a_2 + (y-r_{13})a_3 \\ &= c_1a_1 + \underbrace{(x-r_{12})}_{\in\mathbb{N}}a_2 + \underbrace{(y-r_{13})}_{\in\mathbb{N}}a_3. \end{aligned}$$

y como $c_1 \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$, de nuevo por la Proposición 1.8 esto es una contradicción con el hecho de que $xa_2 + ya_3 \in \mathrm{Ap}(S, a_1)$. Por tanto necesariamente $y \leq r_{13}-1$.
Tomamos ahora $s = xa_2 + ya_3$ un elemento de $\mathrm{Ap}(S, a_1)$. Si $x \leq r_{12}-1, y \leq c_3-1$, entonces claramente $s \leq_S w_1$, de modo que $w_1 \leq_S s$ si y solo si $s = w_1$. Supongamos ahora que $w_2 \leq_S s$. Entonces por la transitividad las relaciones de orden, tendría que ser $w_2 \leq_S w_1$. Veamos que esto no es posible.

$$\begin{aligned} w_2 - w_1 &= (c_3-1)a_3 + (r_{12}-1)a_2 - (c_2-1)a_2 - (r_{13}-1)a_3 \\ &= (c_3 - r_{13})a_3 + (r_{12} - c_2)a_2. \end{aligned}$$

Si fuese $(c_3 - r_{13})a_3 + (r_{12} - c_2)a_2 = x_1a_1 + x_2a_2 + x_3a_3$ para ciertos $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{N}$, se tendría que $(c_3 - r_{13} - x_3)a_3 = x_1a_1 + (x_2 - r_{12} + c_2)a_2$. Como $c_3 - r_{13} - x_3 < c_3$, se tiene que $(c_3 - r_{13} - x_3)a_3 \notin \langle a_1, a_2\rangle \setminus \{0\}$ de modo que necesariamente $x_2 \leq r_{12} - c_2 < 0$. Esto se contradice con $x_2 \in \mathbb{N}$, y la contradicción viene dada por suponer que $w_2 \leq_S w_1$. Obsérvese que esto también prueba que $w_1 \neq w_2$. Por tanto, si $s = xa_2 + ya_3$ con $x \leq r_{12} - 1, y \leq c_3 - 1$ se tiene que $w_1 \not\leq_S s, w_2 \not\leq_S s$ a menos que $s = w_1$ o $s = w_2$. De modo análogo se prueba para el caso $x \leq c_2 - 1, y \leq r_{13} - 1$. Con esto concluimos que $\mathrm{Maximales}_{\leq_S}(\mathrm{Ap}(S, a_1)) = \{(c_3 - 1)a_3 + (r_{12} - 1)a_2, (c_2 - 1)a_2 + (r_{13} - 1)a_3\}$. □

El siguiente corolario ya ha sido probado en la demostración del Teorema.

Corolario 2.9. *Sea $S = \langle a_1, a_2, a_3\rangle$ con $\{a_1, a_2, a_3\}$ un conjunto de generadores minimales tales que sus elementos son coprimos dos a dos. Entonces $t(S) = 2$.*

Por tanto, deshaciéndonos de la hipótesis de $c_3 \neq 1$ obtenemos el siguiente corolario.

Corolario 2.10. *Para cada $\{i, j, k\} = \{1, 2, 3\}$ se tiene que si $c_3 \neq 1$*

$$PF(\langle a_1, a_2, a_3\rangle) = \{(c_j - 1)a_j + (r_{ik} - 1)a_k - a_i, (c_k - 1)a_k + (r_{ij} - 1)a_j - a_1\},$$

y por tanto

$$g(\langle a_1, a_2, a_3\rangle) = \max\{(c_j - 1)a_j + (r_{ik} - 1)a_k - a_i, (c_k - 1)a_k + (r_{ij} - 1)a_j - a_1\}.$$

Si $c_3 = 1$

$$\{g(\langle a_1, a_2, a_3\rangle)\} = PF(\langle a_1, a_2, a_3\rangle) = \{a_1a_2 - a_1 - a_2\}.$$

Demostración. Se obtiene directamente aplicando la Proposición 1.29 al Teorema 2.8. □

Ahora nos deshacemos también de la hipótesis de que los generadores son coprimos dos a dos.

Corolario 2.11. *Sea S un semigrupo numérico tal que $e(S) = 3$. Entonces $t(S) \leq 2$.*

Demostración. Supongamos que $S = \langle a_1, a_2, a_3\rangle$ con $a_1 < a_2 < a_3$. Si $\{a_1, a_2, a_3\}$ no es un conjunto minimal de generadores, entonces $\langle a_1, a_2, a_3\rangle = \langle a_1, a_i\rangle$ con $i = 2$ o $i = 3$, de modo que por la Proposición 2.2 se tiene que $t(S) = 1$. Si $\{a_1, a_2, a_3\}$ son coprimos dos a dos, por el Corolario 2.9 se tiene que $t(S) = 2$. De lo contrario, aplicamos la Proposición 2.5 tantas veces como sea necesario hasta llegar a un semigrupo numérico S' cuyos generadores sean coprimos dos a dos. Entonces $t(S') = t(S)$, y $t(S') = 1$ si $e(S') = 2$ (por la Proposición 2.2) mientras que $t(S') = 2$ si $e(S') = 3$ (por el Colorario 2.9). □

Ejemplo 2.12. Sea $S = \langle 6, 8, 11\rangle$. Se tiene que $d = \gcd(6, 8) = 2$. Entonces $S' = \langle 3, 4, 11\rangle = \langle 3, 4\rangle$, es decir, $e(S') = 2$, luego ya sé que $t(S') = 1 = t(S)$. Como $\mathrm{PF}(S') = \{3 \cdot 4 - 3 - 4\} = \{5\}$, se tiene por la Proposición 2.5 que $\mathrm{PF}(S) = d\mathrm{PF}(S') + (d - 1) \cdot 11 = \{2 \cdot 5 + 11\} = \{21\}$. Comprobemos que esto es correcto usando GAP:

```
gap> S:=NumericalSemigroup(6,8,11);
<Numerical semigroup with 3 generators>
gap> T:=NumericalSemigroup(3,4);
<Numerical semigroup with 2 generators>
gap> PseudoFrobenius(T);
[ 5 ]
gap> PseudoFrobenius(S);
[ 21 ]
```

Ejemplo 2.13. Supongamos ahora que $S = \langle 18, 20, 23\rangle$. Se tiene que $d = \gcd(18, 20) = 2$. Entonces $S' = \langle 9, 10, 23\rangle$, luego en este caso $e(S') = 3$, luego ya sé que $t(S') = 2 = t(S)$. Se tiene que:

$$\left\{\begin{array}{rl} 7\cdot 9 & = 4\cdot 10 + 1\cdot 23 \\ 5\cdot 10 & = 3\cdot 9 + 1\cdot 23 \\ 2\cdot 23 & = 4\cdot 9 + 1\cdot 10 \end{array}\right. \quad \Longrightarrow \quad \left\{\begin{array}{lll} c_1 = 7 & r_{12} = 4 & r_{13} = 1 \\ c_2 = 5 & r_{21} = 3 & r_{23} = 1 \\ c_3 = 2 & r_{31} = 4 & r_{32} = 1 \end{array}\right.$$

Por tanto usando el Teorema 2.8 obtenemos que

$$\text{Maximales}_{\leq_{S'}}(\text{Ap}(S', 23)) = \{6\cdot 9 + 0\cdot 10, 4\cdot 10 + 3\cdot 9\} = \{54, 67\}$$

y por tanto $\text{PF}(S') = \{54 - 23, 67 - 23\} = \{31, 44\}$. Usando la Proposición 2.5 obtenemos que $\text{PF}(S) = 2\{31, 44\} + 1\cdot 23 = \{85, 111\}$. Comprobemos que esto es correcto usando GAP:

```
gap> S:=NumericalSemigroup(18,20,23);
<Numerical semigroup with 3 generators>
gap> T:=NumericalSemigroup(9,10,23);
<Numerical semigroup with 3 generators>
gap> PseudoFrobenius(T);
[ 31, 44 ]
gap> PseudoFrobenius(S);
[ 85, 111 ]
```

Ejemplo 2.14. Para el último ejemplo, veamos el caso en el que hay que hacer varias reducciones sucesivas. Supongamos que $S = \langle 210, 154, 69\rangle$. La primera reducción sería $S' = \langle 15, 11, 69\rangle$ donde $d = 14$. La segunda sería $S'' = \langle 5, 11, 23\rangle$ donde $d' = 3$. Se tiene que $\text{PF}(S'') = \{17, 29\}$, y

$$\text{PF}(S) = 14\text{PF}(S') + 13\cdot 69 = 14(3\text{PF}(S'') + 2\cdot 11) + 13\cdot 69 = \{1919, 2423\}.$$

2.1.3. Cuatro o más generadores.

A día de hoy no se ha encontrado una fórmula que calcule $g(\langle a_1, \ldots, a_n\rangle)$ para ningún $n \geq 4$, y es por ello que esta búsqueda sería una de las posibles formas de continuar este trabajo. Sí que se conoce dicha fórmula, sin embargo, para muchas familias de $\mathcal{S}_n$ para $n \geq 4$. En el Apéndice A se pueden encontrar algunos ejemplos. La labor investigadora se centra en encontrar esta relación para familias cada vez más generales, con el fin último de encontrar una fórmula explícita para $g(\langle a_1, \dots a_n\rangle)$ para algunos $n \geq 4$ (que ya sabemos que no podrá ser como la descrita en el Teorema 2.3).

En este caso, sin embargo, se añade una complicación, y es el hecho de que no existe una cota para el tipo de $S = \langle a_1, \dots, a_n\rangle$ para $n \geq 4$ que no dependa de los generadores (como ya vimos en el Corolario 1.33 hay una cota que depende del menor de los generadores). Esto se puede ver en el siguiente ejemplo propuesto por Backelin y publicado por primera vez en 1987 por Fröberg, Gottlieb y Häggkvist [9], acompañado de una demostración algo ambigua. En 2021, Enescu y Suresh proporcionaron una demostración muy detallada del ejemplo de Backelin, que se puede encontrar en [8].

Ejemplo 2.15. Sea $n \geq 2$, $r \geq 3n + 2$ y $s = r(3n + 2) + 3$. Definimos el semigrupo numérico
$$S = \langle s, s + 3, s + 3n + 1, s + 3n + 2\rangle.$$
Sea $M = \{(r + 1)s + i \mid -2 \leq i \leq 3n - 1,\ i \not\equiv 0 \pmod 3\}$. Se tiene que $M \subset \mathrm{PF}(S)$. Por tanto, como $|M| = 2n + 2$, se tiene que $t(S) \geq 2n + 2$, de modo que no podemos acotar el tipo superiormente por algo que no sea la propia s.

2.2. Semigrupos numéricos con un conjunto de pseudo-números de Frobenius dado.

Dado un entero positivo g, existe al menos un semigrupo numérico con número de Frobenius g (basta tomar $\{0, g + 1, \rightarrow\}$). Sin embargo, dado un conjunto de enteros positivos es posible que este no sea el conjunto de pseudo-números de Frobenius de ningún semigrupo numérico. Si antes, dado un semigrupo numérico queríamos encontrar sus pseudo-números de Frobenius, el problema en el que nos centraremos ahora es dado un conjunto de enteros positivos, ver si pueden ser los pseudo-números de Frobenius de algún semigrupo numérico.

A lo largo de esta sección, $\mathsf{PF} = \{g_1, \dots, g_n\}$ será un conjunto finito de enteros positivos, donde $n \geq 1$. Denotaremos por $\mathcal{S}(\mathsf{PF})$ al conjunto de semigrupos numéricos cuyo conjunto de pseudo-números de Frobenius es PF. Observemos que $\mathcal{S}(\mathsf{PF})$ es o bien vacío o bien finito; a partir de g_n todos los enteros pertenecen al semigrupo numérico, de modo que $|\mathcal{S}(\mathsf{PF})| \leq 2^{g_n - n}$. Con esta notación, la pregunta en la que nos centraremos es la siguiente:

Pregunta 2.16. *¿Qué condiciones son suficientes para asegurar que $\mathcal{S}(\mathsf{PF}) \neq \emptyset$?*

Esta pregunta ha sido resuelta para $|\mathsf{PF}| \leq 2$. Se presenta aquí su solución de forma anecdótica. Su demostración se puede encontrar en [13].

Proposición 2.17 (Proposición 2.5 en [13])**.** *Sean g_1, g_2 enteros positivos tales que $g_1 < g_2$ y g_2 es impar. Entonces existe un semigrupo numérico S tal que $PF(S) = \{g_1, g_2\}$ si y solo si $\frac{g_2}{2} < g_1$, $(2g_1 - g_2) \nmid g_1$, $(2g_1 - g_2) \nmid g_2$ y $(2g_1 - g_2) \nmid (g_2 - g_1)$.*

Proposición 2.18 (Proposición 2.6 en [13])**.** *Sean g_1, g_2 enteros positivos tales que $g_1 < g_2$ y g_2 es impar. Entonces existe un semigrupo numérico S tal que $PF(S) = \{g_1, g_2\}$ si y solo si $\frac{g_2}{2} < g_1$, $\left(g_1 - \frac{g_2}{2}\right) \nmid g_1$, $\left(g_1 - \frac{g_2}{2}\right) \nmid g_2$ y $\left(g_1 - \frac{g_2}{2}\right) \nmid (g_2 - g_1)$.*

2.2.1. Enteros forzados.

Definición 2.19 (Laguna forzada)**.** Diremos que un entero m es una laguna forzada por PF si m es una laguna en todos los semigrupos numéricos de $\mathcal{S}(\mathsf{PF})$. Denotaremos al conjunto de las lagunas forzadas por $\mathcal{GF}(\mathsf{PF}) = \bigcap_{S\in\mathcal{S}(\mathsf{PF})} L(S)$ (recordemos que $L(S)$ denota las lagunas de S). Si $\mathcal{S}(\mathsf{PF}) = \emptyset$, entonces $\mathcal{GF}(\mathsf{PF}) = \mathbb{N}$.

Definición 2.20 (Elemento forzado)**.** Diremos que un entero m es un elemento forzado por PF si m es un elemento en todos los semigrupos numéricos de $\mathcal{S}(\mathsf{PF})$. Usaremos la notación $\mathcal{EF}(\mathsf{PF})$ para referirnos al conjunto de elementos esporádicos forzados por PF, i.e., $\mathcal{EF}(\mathsf{PF}) = \bigcap_{S\in\mathcal{S}(\mathsf{PF})} N(S)$, (recordemos que $N(S)$ denota los elementos esporádicos de S). Si $\mathcal{S}(\mathsf{PF}) = \emptyset$, entonces $\mathcal{EF}(\mathsf{PF}) = \mathbb{N}$.

La unión de las lagunas forzadas por PF y los elementos forzados por PF constituye los enteros forzados por PF. Los enteros que no son forzados reciben el nombre de enteros libres de PF. A menudo hablaremos de enteros forzados (respectivamente lagunas, elementos) en lugar de enteros forzados por PF (respectivamente lagunas, elementos).

Proposición 2.21 (Proposición 5 en [6])**.** $\mathcal{S}(\mathsf{PF}) \neq \emptyset$ *si y solo si* $\mathcal{GF}(\mathsf{PF}) \cap \mathcal{EF}(\mathsf{PF}) = \emptyset$.

Demostración. $\Longrightarrow$ Por contrarrecíproco; si existe $m \in \mathcal{GF}(\mathsf{PF}) \cap \mathcal{EF}(\mathsf{PF})$ entonces m ha de ser una laguna y un elemento de todo semigrupo numérico de $\mathcal{S}(\mathsf{PF})$, luego necesariamente $\mathcal{S}(\mathsf{PF}) = \emptyset$.
$\Longleftarrow$ Por contrarrecíproco; si $\mathcal{S}(\mathsf{PF}) = \emptyset$, por definición de $\mathcal{GF}(\mathsf{PF})$ y $\mathcal{EF}(\mathsf{PF})$ se tiene que $\mathcal{GF}(\mathsf{PF}) \cap \mathcal{EF}(\mathsf{PF}) = \mathbb{N} \neq \emptyset$. □

2.2.2. Lagunas forzadas.

Para obtener lagunas forzadas tenemos dos mecanismos. El primero se basa en el siguiente resultado.

Proposición 2.22 (Lema 6 en [6])**.** *Sea S un semigrupo numérico y supongamos que $PF(S) = \{g_1 < \ldots < g_n\}$ con $n > 1$ (i.e. $n = t(S)$). Sea $i \in \{2, \ldots, t(S)\}$ y $g \in \langle PF(S)\rangle$*[3] *con $g < g_i$. Entonces $g_i - g$ es una laguna de S.*

Demostración. Si $g = 0$ el resultado es trivial. Supongamos que $g = \lambda_1 g_1 + \ldots \lambda_{i-1} g_{i-1}$, con $\lambda_j \in \mathbb{N}$ para todo $j = 1, \ldots, i-1$. Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que de hecho $\lambda_j > 0$ para todo $j = 1, \ldots, i-1$ (si no, tomamos un subconjunto de índices que cumpla esto). Observemos que si $l \in L(S)$, $h \in \mathrm{PF}(S)$ y $n \geq 1$ tal que $nh \leq l$, entonces aplicando n veces la Proposición 1.27 se tiene que $l - nh \in L(S)$. Por tanto $g_i - \lambda g_1 = l_1 \in L(S)$, $l_1 - \lambda_2 g_2 = l_2 \in L(S)$ e iterando este proceso llegamos a que $l_{i-2} - \lambda_{i-1} g_{i-1} = l_{i-1} \in L(S)$, de modo que $g_i - g = l_{i-1} \in L(S)$. □

[3] $\langle \mathrm{PF}(S)\rangle$ no es necesariamente un semigrupo numérico (el máximo común divisor de sus generadores no tiene por qué ser 1). Lo interpretamos como submonoide de $(\mathbb{N}, +)$.

Observemos también que de acuerdo con el Corolario 1.33, $\{x \in \mathbb{N} \mid 1 \leq x \leq t(S)\} \subset L(S)$.

Sea ahora $\mathsf{PF} = \{g_1, \dots, g_n\}$. Consideremos el conjunto

$$\mathsf{PF} \cup \{x \in \mathbb{N} \mid 1 \leq x \leq n\} \cup \{g_i - g \mid i \in \{2, \dots, n\}, g \in \langle \mathsf{PF} \rangle, g_i > g\}$$

y denotemos por $\mathrm{sfg}(\mathsf{PF})$[4] al conjunto de sus divisores.

Corolario 2.23 (Corolario 8 en [6])**.** *sfg*$(\mathsf{PF}) \subset \mathcal{GF}(\mathsf{PF})$.

Demostración. Si no existe ningún semigrupo numérico S tal que $\mathrm{PF}(S) = \mathsf{PF}$, entonces $\mathcal{GF}(\mathsf{PF}) = \mathbb{N}$ de modo que el resultado es trivial. Sea ahora S tal que $\mathrm{PF}(S) = \mathsf{PF}$. Por la Proposición 2.22, la observación que la sucede y el hecho de que si un elemento es una laguna todos sus divisores también han de serlo, se tiene que $\mathrm{sfg}(\mathsf{PF}) \subset L(S)$. Como esto sucede para todo semigrupo numérico S tal que $\mathrm{PF}(S) = \mathsf{PF}$, concluimos que $\mathrm{sfg}(\mathsf{PF}) \subset \mathcal{GF}(\mathsf{PF})$. □

El segundo mecanismo con el que contamos para obtener lagunas forzadas se basa en que cada vez que encontramos un elemento forzado, este puede producir nuevas lagunas forzadas.

Lema 2.24 ([6])**.** *Supongamos que e es un elemento forzado. Entonces para toda laguna forzada l, o bien $l - e$ es negativo o bien es una laguna.*

Demostración. Si fuese $l - e = s \in S$, entonces $l = s + e$ y l no sería una laguna por la Proposición 1.23. □

En este trabajo se propone, además, una última forma de forzar lagunas. A pesar de no ser una comprobación eficiente desde el punto de vista computacional, permite entender mejor cómo ha de ser un conjunto PF para el cual $\mathcal{S}(\mathsf{PF}) \neq \emptyset$.

Lema 2.25. *Sea $x \in \{1, \dots, \max(\mathsf{PF}) - 1\}$. Si en PF hay dos elementos distintos g_i, g_j tales que $g_i \equiv g_j \pmod{x}$, entonces $x \in \mathcal{GF}(\mathsf{PF})$.*

Demostración. Si no existe un semigrupo numérico S tal que $\mathrm{PF}(S) = \mathsf{PF}$, la prueba es trivial. Supongamos ahora que para cierto S se cumple $\mathrm{PF}(S) = \mathsf{PF}$. De las Proposiciones 1.7 y 1.29 se deduce que si $n \in S^*$, entonces solo puede haber un elemento de cada clase módulo n en PF. Esto prueba el resultado deseado. □

Corolario 2.26. *Sea e un elemento forzado. Si en PF hay dos elementos distintos g_i, g_j tales que $g_i \equiv g_j \pmod{e}$, entonces $\mathcal{S}(\mathsf{PF}) = \emptyset$.*

[4] Del inglés Starting Forced Gaps.

2.2.3. Elementos forzados.

Para obtener elementos forzados tenemos otros dos métodos. El primero hace uso del siguiente lema.

Lema 2.27 (Proposición 2.19 en [14]). *Sea S un semigrupo numérico. Entonces $x \in \mathbb{Z}\backslash S$ si y solo si $g - x \in S$ para algún $g \in PF(S)$.*

Demostración. $\Longrightarrow$ Supongamos que $x \in \mathbb{Z}\backslash S$. Si $x \in \mathrm{PF}(S)$, entonces $x - x = 0 \in S$. Si $x \notin \mathrm{PF}(S)$, entonces $x \notin \mathrm{Maximales}_{\leq_S}(\mathbb{Z}\backslash S)$ (Proposición 1.27), y por tanto existe un $g \in \mathrm{Maximales}_{\leq_S}(\mathbb{Z}\backslash S)$ tal que $x \leq_S g$ i.e. $g - x \in S$. Como $g \in \mathrm{Maximales}_{\leq_S}(\mathbb{Z}\backslash S)$, se tiene que $g \in \mathrm{PF}(S)$.
$\Longleftarrow$ Si $g - x = s \in S$, entonces $g = x + s$. Como $g \in L(S)$, por la Proposición 1.23 se tiene que $x \in L(S)$, de modo que $x \in \mathbb{Z}\backslash S$. $\square$

Ahora tomamos un conjunto de lagunas forzadas G y un $x < \max(\mathsf{PF})$. Distinguimos dos casos (que escribimos como dos proposiciones diferentes) en función de si $x \in G$ o $x \notin G$.

Proposición 2.28 (Lema 10 en [6]). *Sea G un conjunto de lagunas forzadas por PF, y sea $x \in G$. Consideramos el conjunto $H = \{h \in \mathsf{PF} \mid h - x \geq 0, h - x \notin G\}$. Si $H = \{h\}$, entonces $h - x$ es un elemento forzado por PF.*

Demostración. Si no existe ningún semigrupo numérico S tal que $\mathrm{PF}(S) = \mathsf{PF}$, entonces cualquier entero no negativo es un elemento forzado, y en particular también lo es $h - x$. Supongamos ahora que existe un semigrupo numérico S tal que $\mathrm{PF}(S) = \mathsf{PF}$. Por el Lema 2.27 se tiene que $g - x \in S$ para algún $g \in \mathrm{PF}(S)$. Como h es el único elemento de $\mathrm{PF}(S)$ que cumple que $h - x \geq 0$ y $h - x \notin G$, necesariamente $g = h$, i.e. $h - x \in S$. Como esto ocurre para cualquier semigrupo numérico $S \in \mathcal{S}(\mathsf{PF})$, se tiene que $h - x$ es un elemento forzado por PF. $\square$

Proposición 2.29 (Lema 11 en [6]). *Sea G un conjunto de lagunas forzadas por PF con $\mathsf{PF} \subset G$. Sea $x \in \{1, \ldots, \max(\mathsf{PF}) - 1\}\backslash G$. Si no hay ningún entero positivo en $(-x + \mathsf{PF})\backslash G$, x es un elemento forzado por PF.*

Demostración. Como en casos anteriores, ni no existe ningún semigrupo numérico S tal que $\mathrm{PF}(S) = \mathsf{PF}$ la prueba es trivial. Supongamos ahora que existe un semigrupo numérico S tal que $\mathrm{PF}(S) = \mathsf{PF}$, y que para un cierto $x \in \{1, \ldots, \max(\mathsf{PF}) - 1\}\backslash G$ no hay ningún entero positivo en $(-x + \mathsf{PF})\backslash G$. Si fuese $x \notin N(S)$, por el Lema 2.27 se tendría que $g - x \in S$ para cierto $g \in \mathrm{PF}(S)$, pero esto es una contradicción con el hecho de que en $(-x + \mathsf{PF})\backslash G$ no hay enteros positivos. Como este argumento es válido para todo $S \in \mathcal{S}(\mathsf{PF})$, se tiene que $x \in \mathcal{EF}(\mathsf{PF})$. $\square$

El siguiente mecanismo que presentamos se basa en que los menores elementos del conjunto de lagunas fuerzan elementos próximos al máximo de PF.

Lema 2.30 (Lema 12 en [6]). *Sea S un semigrupo numérico y sea i un entero tal que $1 \leq i < m$, donde m denota la multiplicidad de S. Entonces o bien $g(S) - i \in S$ o bien $g(S) - i \in PF(S)$.*

Demostración. Supongamos que $g(S) - i \notin S$. Como $i < m$, se tiene que si $s \in S^*$, entonces $g(S) - i + s \geq g(S) + (m - i) > g(S)$, luego $g(S) - i + s \in S$. Por la propia definición de pseudo-números de Frobenius se tiene que $g(S) - i \in \mathrm{PF}(S)$. □

Como no conocemos la multiplicidad de los semigrupos numéricos que estamos buscando, podemos tomar m como el menor entero positivo que no pertenezca al conjunto de de lagunas forzadas con el que estamos trabajando.

2.2.4. Condición de parada.

Hasta ahora solo hemos visto una condición necesaria y suficiente (Proposición 2.21) para que dado un conjunto de enteros positivos $\mathsf{PF} = \{g_1 < \ldots < g_n\}$, el conjunto $\mathcal{S}(\mathsf{PF})$ no sea vacío. Se presenta aquí otra condición necesaria. Quizás hubiese tenido más sentido mostrarla al principio de la sección, pero requiere de resultados que hemos ido probando a lo largo de ella.

Lema 2.31 (Lema 14 en [6]). *Sea S un semigrupo numérico tal que $PF(S) = \mathsf{PF}$. Sea $i \in \{2, \ldots, n\}$ y sea $g \in \langle \mathsf{PF} \rangle \backslash \{0\}$ con $g < g_i$. Entonces existe un $k \in \{1, \ldots, n\}$ tal que $g_k - (g_i - g) \in S$.*

Demostración. Por la Proposición 2.22 sabemos que $g_i - g \in L(S) \subset \mathbb{Z} \backslash S$. A partir de esto, el Lema 2.27 nos da el resultado. □

Corolario 2.32 (Corolario 15 en [6]). *Sea S un semigrupo numérico tal que $PF(S) = \mathsf{PF}$. Entonces $g_1 \geq g_n - g_{n-1}$.*

Demostración. [6] Tomando en el Lema 2.31 $i = n$ y $g = g_1$, tenemos que existe un $k \in \{1, \ldots, n\}$ tal que $g_k - (g_n - g_1) \in S$ (de hecho $k \neq n$ porque $g_1 \notin S$). Se tiene que $g_{n-1} - (g_n - g_1) \geq g_k - (g_n - g_1) \in S$, de modo que $g_{n-1} - (g_n - g_1) \geq 0$. □

Este corolario es útil en tanto que nos proporciona una forma rápida de concluir que $\mathcal{S}(\mathsf{PF}) = \emptyset$ sin necesidad de buscar enteros y lagunas forzadas.

2.2.5. La búsqueda de un algoritmo.

A lo largo de esta sección hemos visto herramientas que nos permiten calcular algunos de los enteros forzados. Sin embargo, hay otros que los resultados vistos no detectan, por lo que si nuestros conjuntos de enteros forzados son disjuntos, no podemos concluir nada acerca de $\mathcal{S}(\mathsf{PF})$. En este último apartado nos centraremos en esta problemática.

En primer lugar, escribamos a modo se pseudo-código el algoritmo que se ha descrito de forma implícita a lo largo de esta sección.

Input: $[G, E, \mathsf{PF}]$ donde G, E son lagunas forzadas por PF y elementos forzados por PF respectivamente.
Output: $[G', E']$ donde $G' \supset G$ y $E' \supset E$ son lagunas forzadas por PF y elementos forzados por PF respectivamente, o fail si en algún paso del proceso se llega a que $\mathcal{S}(\mathsf{PF}) = \emptyset$.
if *No se cumple 2.32* **then**
  return fail;
repeat
  Usar los resultados 2.22 y 2.24 para hallar nuevas lagunas forzadas y guardarlas en G'.
  Usar los resultados 2.28, 2.29 y 2.30 para hallar nuevos enteros forzados y guardarlos en E'.
  if $G' \cap E' \neq 0$ **then**
    return fail;
until *No surjan más lagunas forzadas ni elementos forzados*;
return $[G', E']$;

Algoritmo 1: SimpleForcedIntegers

Este algoritmo está implementado en el paquete `NumericalSgps` de `GAP` bajo el nombre de `SimpleForcedIntegersForPseudoFrobenius`. Para el propósito que nos concierne ahora, como el conjunto G del input introduciremos el conjunto $\mathrm{sfg}(\mathsf{PF})$, que podremos calcular usando la función `StartingForcedGapsForPseudoFrobenius`(PF) del mismo paquete, mientras que el conjunto E lo dejaremos vacío. Como cabía esperar, hay enteros forzados que el algoritmo no detecta, y como consecuencia hay veces que no detecta que $\mathcal{S}(\mathsf{PF}) = \emptyset$ (ver Ejemplo 2.35). Un intento de mejorar el algoritmo pasa por introducir una nueva forma de forzar lagunas.

Definición 2.33 (Entero admisible)**.** Sean G, E conjuntos de lagunas forzadas y enteros forzados respectivamente, y v un entero libre para (G, E). Se dice que v es un entero admisible para (G, E) si el Algoritmo 1 con el input $(G, E \cup \{v\}, \mathsf{PF})$ no devuelve fail. En el caso contrario, diremos que v es no admisible para (G, E).

Lema 2.34 (Lema 25 en [6])**.** *Sean G, E conjuntos de lagunas forzadas y enteros forzados respectivamente, y sea v un entero libre para (G, E). Si v es no admisible para (G, E), entonces v es una laguna forzada.*

Esta idea dio lugar a un nuevo algoritmo, implementado en `GAP` bajo el nombre de `ForcedIntegersForPseudoFrobenius`, que propone una mejor solución al problema de detectar cuándo $\mathcal{S}(\mathsf{PF}) = \emptyset$. Se basa en aplicar primero el algoritmo 1 y luego, si queda algún entero libre, buscar enteros no admisibles para después volver a aplicar el algoritmo 1 a este nuevo conjunto de lagunas forzadas. La notación $A[i]$ se refiere al i-ésimo elemento de A.

El Algoritmo 2 detecta más enteros forzados que el Algoritmo 1. De este modo, hay casos en los cuales el Algoritmo 2 detecta que $\mathcal{S}(\mathsf{PF}) = \emptyset$ (i.e. devuelve fail) pero el Algoritmo 1 no. En este sentido decimos que el Algoritmo 2 es mejor.

Input: PF.
Output: $[G, E]$ donde G, E son lagunas forzadas por PF y elementos forzados por PF respectivamente, o fail si en algún paso del proceso se llega a que $\mathcal{S}(\mathsf{PF}) = \emptyset$.
fints := SimpleForcedIntegers(sfg(PF), $\emptyset$, PF);
if *(fints = fail)* **then**
  return fail;
else
  if *(fints[1]$\cup$ fints[2] $= \{0, \ldots, \text{máx}(\mathsf{PF})\}$)* **then**
    return fints;
nuevaslagunas := conjunto de enteros no admisibles para (fints[1], fints[2]);
return SimpleForcedIntegers(nuevaslagunas $\cup$ fints[1], fints[2], PF);

Algoritmo 2: ForcedIntegers

Ejemplo 2.35. Si $|\mathsf{PF}| > 1$, la función `ForcedIntegersForPseudoFrobenius_QV(PF)` primero calcula sfg(PF) usando la función `StartingForcedGapsForPseudoFrobenius` y luego aplica el Algoritmo 1 con input [sfg(PF), $\emptyset$, PF]. Si $|\mathsf{PF}| = 1$, devuelve como lagunas forzadas los divisores de PF y como elementos forzados $[0, \mathsf{PF} + 1]$.

```
gap> PF:=[ 25, 29, 33, 35, 38, 41, 46 ];
[ 25, 29, 33, 35, 38, 41, 46 ]
gap> ForcedIntegersForPseudoFrobenius(PF);
fail
gap> ForcedIntegersForPseudoFrobenius_QV(PF);
[ [ 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 16, 17, 19, 21, 23,
25, 29, 33, 35, 38, 41, 46 ],
[ 0, 30, 34, 36, 37, 39, 40, 42, 43, 44, 45, 47 ] ]
```

Delgado, García-Sánchez y Robles-Pérez han realizado millones de pruebas y pese a ello no han encontrado ningún conjunto PF para el cual $\mathcal{S}(\mathsf{PF}) = \emptyset$ pero el Algoritmo 2 no devuelva fail. A pesar de ello, han preferido no expresar esto como conjetura, sino dejarlo como pregunta abierta.

Pregunta 2.36. *Si dado un input* PF *el Algoritmo 2 no devuelve fail, ¿es posible que* $\mathcal{S}(\mathsf{PF}) = \emptyset$*?*

Observemos que si la respuesta a esta pregunta es negativa, entonces tendríamos una respuesta para la Pregunta 2.16.

Una continuación natural de este estudio pasaría por, una vez sabido que $\mathcal{S}(\mathsf{PF}) \neq \emptyset$, calcular los elementos de $\mathcal{S}(\mathsf{PF})$. Hay varios algoritmos diseñados para esto, y todos se basan el la construcción de los llamados "árboles recursivos". El procedimiento es el siguiente: dada una lista de enteros libres $\{v_1 < \ldots < v_m\}$, forzamos uno de ellos como elemento (procediendo siempre de menor a mayor, de modo que en la primera iteración forzamos v_1). Una vez forzado dicho elemento, calculamos el nuevo conjunto de enteros libres (recordemos que cada elemento forzado genera nuevas lagunas forzadas y viceversa), al que llamaremos $\{\widehat{v_1} < \ldots < \widehat{v_k}\}$. Con esta nueva lista de enteros libres volvemos a aplicar el primer paso, de modo que ahora estamos forzando v_1 y $\widehat{v_1}$. Iteramos este proceso hasta que no queden enteros libres. Llegado este punto, o bien tenemos un semigrupo numérico o bien las lagunas forzadas intersecan a los enteros forzados, de modo que no existe un semigrupo numérico con estas características. Ahora pasamos a la siguiente sub-rama, que empezaría forzando como enteros a v_1 y a $\widehat{v_2}$, y forzando como laguna a $\widehat{v_1}$ (o, en general, a todos los elementos libres menores que el que estamos forzando en este paso). Repetimos el mismo proceso en todas las sub-ramas, y después pasamos a la siguiente rama, que empezaría por forzar como entero a v_2 y como laguna a v_1.

Sin embargo, este problema no tiene tanto interés matemático como el de encontrar las lagunas forzadas y los enteros forzados, pues una vez conocidos estos conjuntos, a base de un mecanismo de prueba y error se puede producir la lista de elementos de $\mathcal{S}(\mathsf{PF})$. Es por ello que en este trabajo se ha decidido no presentar los diferentes algoritmos que existen para el cálculo de los elementos de $\mathcal{S}(\mathsf{PF})$. Para concluir el trabajo, veamos un último ejemplo que recoja todo lo expuesto en esta sección.

Ejemplo 2.37. Sea $\mathsf{PF} = \{19, 29\}$. Calculemos los enteros forzados.

```
gap> PF := [ 19, 29 ];
[ 19, 29 ]
gap> ForcedIntegersForPseudoFrobenius(PF);
[ [ 1, 2, 4, 5, 10, 11, 19, 20, 29 ], [ 0, 9, 18, 24, 25, 27, 28,
30 ] ]
```

Por tanto los enteros libres son $\{3, 6, 7, 8, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 21, 22, 23, 26\}$. Como en este caso no son muchos, podemos utilizar el método descrito anteriormente para producir una lista de $\mathcal{S}(\mathsf{PF})$. En la Figura 2.1 [6], cada línea es uno de estos semigrupos numéricos, representado usando códigos de color. El rojo se utiliza para los pseudo-números de Frobenius, el cian para las lagunas forzadas, magenta para los elementos forzados, el verde para los elementos del semigrupo numérico y el azul marino para el conjunto minimal de generadores. Para los enteros que pertenecen a más de una categoría se han utilizado colores degradados

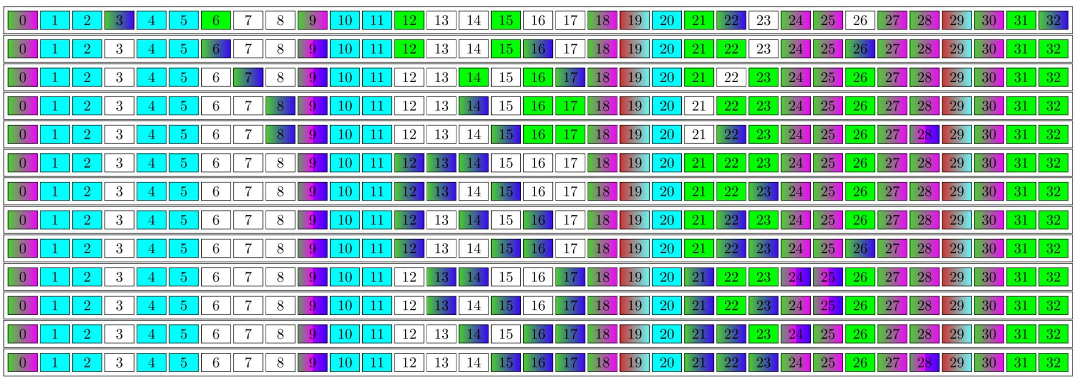

Figura 2.1: Lista de los semigrupos numéricos cuyo pseudo-números de Frobenius es $\{19, 29\}$.

APÉNDICE A

Fórmula del número de Frobenius para algunas familias de semigrupos numéricos.

Como comentamos en la sección 2.1.3, para ciertas familias de semigrupos numéricos con $n \geq 4$ generadores se conoce una fórmula que devuelve el número de Frobenius. En este apéndice se exponen algunas de ellas.

Empecemos por el caso $n = 4$. Usando teoría de grafos, Dulmage y Mendelsohn [7] llegaron a un resultado que posteriormente vio su aplicación en el campo de los semigrupos numéricos.

Teorema A.1 (Teorema 2.4.1 en [12])**.** *Sea a un entero no negativo. Entonces:*

1. $g(\langle a, a+1, a+2, a+4\rangle) = (a+1)\left\lfloor \frac{a}{4} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{a+1}{4} \right\rfloor + 2\left\lfloor \frac{a+2}{4} \right\rfloor - 1.$
2. $g(\langle a, a+1, a+2, a+5\rangle) = (a+1)\left\lfloor \frac{a+1}{5} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{a}{5} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{a+2}{5} \right\rfloor + 2\left\lfloor \frac{a+3}{5} \right\rfloor - 1.$
3. $g(\langle a, a+1, a+2, a+6\rangle) = (a+2)\left\lfloor \frac{a}{6} \right\rfloor + 2\left\lfloor \frac{a+1}{6} \right\rfloor + 5\left\lfloor \frac{a+2}{6} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{a+3}{6} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{a+4}{6} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{a+5}{6} \right\rfloor - 1.$

Años más tarde, Kan [10] se aproximó al problema del cálculo de $g(\langle a_1, \ldots, a_n\rangle)$ usando fracciones continuas. A partir su estudio, Ramírez Alfonsín [12] dedujo el siguiente resultado para el caso $n = 4$.

Proposición A.2. *[12] Sea $\{\alpha\}$ la parte fraccionaria de $\alpha \in \mathbb{R}$, i.e., $\{\alpha\} = \alpha - \lfloor \alpha \rfloor$. Sean a, b enteros positivos tales que $a > b \geq 2$.*

1. *Si $a + 1 \geq (b-1)\left\lfloor \frac{a}{b} \right\rfloor$ entonces*

$$g(\langle a, a+1, a+2, a+b, a+2b\rangle) = (a+b)\left\lfloor \frac{a-1}{b} \right\rfloor + ab - 2a - 1 - \min\left\{ -b + (ab+b)\left\{-\frac{a}{b}\right\} + a\left\lfloor \frac{a-1}{2b} \right\rfloor + a\left\lfloor \frac{b\{(a-1)/b\}}{2} \right\rfloor, a\left\lfloor \frac{b+1}{2} \right\rfloor + a\left\lfloor \frac{a-1-b}{2b} \right\rfloor \right\}.$$

2. *Si* $2a+3 \geq (2b-3)\left\lfloor \frac{a}{b} \right\rfloor$ *entonces*

$$g(\langle a, a+1, 2a+3, a+b\rangle) = (a+b)\left\lfloor \frac{a-1}{b} \right\rfloor + ab - 2a - 1 - \text{mín}\left\{ -b \right.$$
$$\left. + (ab+b)\left\{-\frac{a}{b}\right\} + a\left\lfloor \frac{a-1}{2b} \right\rfloor + a\left\lfloor \frac{b\{(a-1)/b\}}{3} \right\rfloor, a\left\lfloor \frac{b+2}{3} \right\rfloor \right\}.$$

Pasamos ahora a un n arbitrario. Tripathi [18] dedujo una fórmula que devuelve el conjunto de pseudo-números de Frobenius cuando los generadores son términos consecutivos de una progresión aritmética.

Teorema A.3. *Sean* a, d *enteros positivos coprimos entre sí, y sea* $k \geq 2$ *entero. Escribimos* $a_j = a + (j-1)d$ *con* $1 \leq j \leq k$. *Si* $a - 1 = q(k-1) + r$ *con* $1 \leq r \leq k-1$, *entonces:*

$$PF(\langle a_1, \ldots, a_k\rangle) = \left\{ a\left\lfloor \frac{x-1}{k-1} \right\rfloor + dx \;\middle|\; a - r \leq x \leq a-1 \right\}.$$

Observemos que en este caso se tiene que $t(\langle a_1, \ldots, a_k\rangle) = r \leq k-1$.

Bibliografía

[1] Assi, A., D'Anna, M., García-Sánchez, P.A.: Numerical semigroups and applications. *Springer*, Switzerland, 2016.

[2] Brás-Amorós, M.: Fibonacci-like behavior of the number of numerical semigroups of a given genus. *Semigroup Forum.* **76**. (2008), 379-384.

[3] Cavaliere, M. P., Niesi, G.: On monomial curves and Cohen-Macaulay type. *Manuscripta Math.* **42** (1983), 147–159.

[4] Curtis, F.: On formulas for the Frobenius number of a numerical semigroup. *Math. Scand.* **67** (1990), 190-192.

[5] Delgado, M., García-Sánchez, P.A., Morais, J.: NumericalSgps: a GAP package. Version 1.2.2 (2020). https://gap-packages.github.io/numericalsgps/.

[6] Delgado, M., García-Sánchez, P. A., Robles-Pérez, A. M.: Numerical semigroups with a given set of pseudo-Frobenius numbers. *LMS J. Comput. Math.* **19** (2016), 186–205.

[7] Dulmage, A. L., Mendelsohn, N. S.: Gaps in the exponent set of primitive matrices. *Illinois J. Math.* **8** (1964), 642–656.

[8] Enescu, F., Suresh, A.: The generators, relations and type of the Backelin semigroup. *Comm. Algebra.* **49** (2021), 5083–5092.

[9] Fröberg, R., Gottlieb, C., Häggkvist, R.: On numerical semigroups. *Semigroup Forum.* **35** (1987), 63-83.

[10] Kan, I. D.: Representation of numbers by linear forms. (Russian) *Mat. Zametki* **68** (2000), 210–216; translation in *Math. Notes* **68** (2000), 185–190.

[11] Martínez Durán, S.: Semigrupos numéricos y sus lagunas. Trabajo Fin de Grado, Universidad de Valladolid, Valladolid, 2019. https://uvadoc.uva.es/handle/10324/38216.

[12] Ramírez Alfonsín, J.L.: The Diophantine Frobenius Problem. *Oxford Lecture Series in Mathematics and its Applications.* **30**. Oxford University Press, New York, 2005.

[13] Robles-Pérez, A.M., Rosales, J.C.: The genus, Frobenius number and pseudo-Frobenius numbers of numerical semigroups of type 2. *Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A.* **146** (2016), 1081–1090.

[14] Rosales, J.C., García-Sánchez, P.A.: Numerical semigroups. *Developments in Mathematics.* **20**, Springer, New York, 2009.

[15] Rosales, J.C., García-Sánchez, P.A.: Numerical semigroups with embedding dimension three. *Arch. Math.* **83** (2004), 488-496.

[16] Selmer, E.S.: On the linear diophantine problem of Frobenius. *J. Reine Angew. Math.* **293**(294) (1977), 1-17.

[17] The GAP Group: GAP – Groups, Algorithms, and Programming. Version 4.11.1 (2021). https://www.gap-system.org.

[18] Tripathi, A.: On a variation of the coin exchange problem for arithmetic progressions. *Integers.* **3** (2003), 5 pp.