

Generalidades de códigos

1. Sea C el código binario de longitud n obtenido añadiendo a las palabras de longitud $n - 1$ un comprobador de paridad global, o sea $C = \{x_1 \dots x_n \in \mathbb{F}_2^n \mid \sum_{i=1}^n x_i \equiv 0 \pmod{2}\}$. Demuestra que C es un $(n, 2^{n-1}, 2)$ -código binario, y en particular que C siempre detecta un error.

2. Consideramos el código C de repetición de longitud 4 sobre el alfabeto de 29 letras $\mathbb{F}_{29} = \mathbb{Z}/29\mathbb{Z}$.

a) Demuestra que C permite corregir un error y detectar dos en cada mensaje emitido.

b) Si hacemos corresponder los números 0 - 26 a las letras A - Z (incluyendo la Ñ y también la W) y además 27=j, 28=!, y recibimos el siguiente mensaje (los guiones están solo para separar los números),
27 - 27 - 15 - 27 - 5 - 5 - 5 - 5 - 5 - 4 - 4 - 5 - 4 - 11 - 11 - 11 - 8 - 8 - 8 - 26 - 26 - 8 - 26 - 26 - 13 - 6 - 13
- 13 - 13 - 13 - 0 - 13 - 13 - 22 - 22 - 22 - 8 - 8 - 8 - 8 - 8 - 3 - 3 - 3 - 3 - 0 - 0 - 0 - 0 - 0 - 3 - 3 - 28 - 3 -
28 - 28, ¿qué interpretarias que nos quieren decir?

3. Construye, o demuestra la no existencia, de (n, M, d) -códigos binarios con los siguientes parámetros:

$$(6, 2, 6), \quad (3, 8, 1), \quad (4, 8, 2), \quad (8, 30, 3), \quad (4, 2, 3), \quad (8, 4, 5).$$

4. Demuestra que $A_q(3, 2) = q^2$ para cualquier $q \geq 2$.

5. Demuestra que $A_2(5, 3) = 4$ y que, salvo equivalencia, solo hay un $(5, 4, 3)_2$ -código.

6. Demuestra que $A_2(4, 3) = 2$ y que, salvo equivalencia, existe un único $(4, 2, 3)$ -código binario.

7. Demuestra que todo $(q + 1, M, 3)_q$ -código satisface $M \leq q^{q-1}$.

8. Demuestra que si C es un código binario perfecto de longitud n con $d = 7$, entonces $n = 7$ o $n = 23$. Construye un código binario perfecto de longitud $n = 7$ con $d = 7$.

9. Definamos $S_q(n, d) := q^{n-d+1}$ y $H_q(n, d) := \frac{q^n}{\sum_{i=0}^t \binom{n}{i} (q-1)^i}$ respectivamente a las cota de Singleton y de Hamming.

a) Demuestra que $H_2(n, d) \leq S_2(n, d)$ si y d es impar.

b) Caracteriza los pares (q, n) para los que $S_q(n, 3) < H_q(n, 3)$.