

APELLIDOS, NOMBRE: _____

1	2	3	4	5	6	FINAL
10	10	10	10	10	10	60

Razonar debidamente las respuestas

-
1. Demostrar que para $a_1, a_2, \dots, a_n \in (-1, 0]$, se tiene la desigualdad:

$$\prod_{i=1}^n (1 + a_i) \geq 1 + \sum_{i=1}^n a_i.$$

-
2. Determina, si existe, el máximo, mínimo, ínfimo y supremo del conjunto:

$$A = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid \frac{|x^2 - 1|}{x} \geq 1 + x \right\}.$$

-
3. Dada la sucesión definida de forma recursiva como

$$a_1 = 1, \quad a_{n+1} = \sqrt[3]{2a_n + a_n^2}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

a) Demuestre que $1 \leq a_n < 2$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

b) Demuestre que $a_{n+1} > a_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

c) Decide si $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es convergente. En caso afirmativo, calcular $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$.

Justifica adecuadamente su respuesta, enunciando los resultados utilizados.

Continúa en la siguiente página

4. Estudiar para qué valores del parámetro $a > 0$ converge la siguiente serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a^n n^a.$$

Justifica adecuadamente su respuesta, nombrando y enunciando los criterios aplicados.

5. Estudie razonadamente la convergencia de las serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n^2 + 1} - n}{n}$$

Justifica adecuadamente su respuesta, nombrando y enunciando los criterios aplicados.

6. Decida si la serie

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(\log n)^n}$$

converge absoluta o condicionalmente o diverge. Justifica adecuadamente su respuesta, nombrando y enunciando los criterios aplicados.
