

Derivabilidad

1. Calcule, usando la definición, las derivadas de $f(x) = x^3$ y de $g(x) = \cos x$.
2. Decida razonadamente la diferenciabilidad en los puntos $x = 0$, $x = 3$ y $x = -1$ de la función

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x > 0, \\ 0 & \text{si } -1 \leq x \leq 0, \\ x + 1 & \text{si } x < -1. \end{cases}$$

3. Supongamos que $|f(x)| \leq x^2$ en cierto intervalo $(-\delta, \delta)$. Utilizar la definición de derivada para calcular $f'(0)$.
4. Usando la definición de derivada, decide si las siguientes funciones son derivables en $x = 0$:

$$f(x) = 1/(x^2|x| + 1) \quad g(x) = \begin{cases} x^2 \sin(1/x) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}, \quad h(x) = \begin{cases} x \sin(1/x) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}.$$

5. Calcule las derivadas de las siguientes funciones en los puntos donde estén definidas:

$$\begin{aligned} a) f(x) &= \sin\left(x + \frac{\cos x}{x}\right), & b) f(x) &= \log(e^{5x} + 1), & c) f(x) &= (x + 2^x)e^x, \\ d) f(x) &= \frac{x}{\sqrt{100 - x^2}}, & e) f(x) &= \frac{x \log x}{e^x + \sin^2 x}, & f) f(x) &= e^{(e^{1/x} + 1)^2}. \end{aligned}$$

6. ¿Qué se obtiene al derivar tres veces la función $f \circ g$? ¿Y al derivar dos veces la función e^f ?
7. La fórmula

$$f'(x) = f(x)(\log f(x))'$$

se llama *derivación logarítmica* y se dice que L. Euler (matemático del siglo XVIII) lo consideraba su truco favorito. Es útil para calcular $f'(x)$ sólo en los casos en que se pueden aplicar las propiedades de los logaritmos: $\log(a \cdot b) = \log a + \log b$, $\log a^b = b \log a$.

- a) Use la derivación logarítmica para hallar las derivadas de

$$f(x) = (x^2 + 1)^7(e^x + 1)(\cos x + \sin x) \quad \text{y} \quad g(x) = (x^2 + 1)^{x^2+1}.$$

- b) Escriba una regla para derivar un producto de funciones $f_1(x) \cdot f_2(x) \cdots f_n(x)$.

8. Determine las rectas tangentes a las gráficas de las siguientes funciones en el punto indicado:

$$(a) f(x) = \ln(e + \sin x) \quad \text{en } x = 0, \quad (b) f(x) = \sin^2 x - \cos^2 x \quad \text{en } x = \pi/6.$$

9. ¿En qué punto corta al eje X la recta tangente a la gráfica de $f(x) = x^2$ en $x = x_0$?
10. Determine el valor del parámetro real a para que la tangente a la gráfica de la función $f(x) = x^2 - 5ax$ en el origen: (a) sea horizontal; (b) tenga pendiente -1 .
11. Considerando la gráfica de $f(x) = e^x$ y la recta tangente en el punto $(0, 1)$, deduzca geométricamente la desigualdad $1 + x \leq e^x$ para todo $x \in \mathbb{R}$.
12. La fórmula

$$1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^m = \frac{x^{m+1} - 1}{x - 1}$$

es bien conocida y se prueba por inducción o simplemente multiplicando por $x - 1$.

Derivando, utilicela para calcular $1 \cdot 2^1 + 2 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2^3 + \cdots + 15 \cdot 2^{15}$.

13. Las funciones $f(x) = \arcsen x$ y $g(x) = \arccos x$ se definen en $(0, 1)$ como las inversas de las funciones $\sen x$ y $\cos x$, respectivamente, restringidas a $(0, \pi/2)$.

a) Compruebe que $f'(x) = -g'(x) = 1/\sqrt{1-x^2}$.

b) Empleando el hecho de que $f+g$ tiene derivada nula, halle una relación entre $\arcsen x$ y $\arccos x$.

14. La función *seno hiperbólico* viene dada por $\sinh(x) = (e^x - e^{-x})/2$. Llamamos arcoseno hiperbólico a su inversa. Asumiendo que sabemos que arcoseno hiperbólico es derivable en todo punto, calcula su derivada.

15. Sea f una función biyectiva tal que $f^{-1}(x)$ es derivable dos veces. Calcule una fórmula para la derivada segunda de la función inversa.

16. (*Método de Newton*) Dada una función $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ derivable y $x_0 \in \mathbb{R}$, sea x_1 la intersección con el eje X de la recta tangente en $x = x_0$ a la gráfica de f , x_2 la intersección de la tangente en $x = x_1$ y así sucesivamente.

a) Compruebe que la fórmula que da x_{n+1} en función de x_n es

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.$$

En ciertas condiciones la sucesión $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge a α tal que $f(\alpha) = 0$. Este método para resolver $f(x) = 0$ suele ser más rápido que el de bisección.

b) Comprueba que para $f(x) = x^2 - t$ se tiene $x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + \frac{t}{x_n})$ (es el método babilónica para aproximar $\sqrt{t}$).

17. Aproxima el valor de $\sqrt{3}$ utilizando el método de Newton con 2 iteraciones. Compáralo con la aproximación calculada en clase mediante el método de la bisección.