

Funciones, límites y continuidad

1. Para cada una de las funciones siguientes, halle su dominio (el conjunto más grande posible donde la función está definida).

$$f(x) = \sqrt{x^2 - 9}; \quad g(x) = \frac{x-3}{x^2-4x+3}; \quad F(x) = \frac{x+5}{\sqrt{x^2-5x+6}}; \quad G(x) = \log(x^2-4).$$

2. Esboce las gráficas de las siguientes funciones:

$$f(x) = |x+2| - 3; \quad g(x) = -\sqrt{x-2}; \quad h(x) = 2\cos x + 1; \quad u(x) = \cos \frac{x}{2}, \quad v(x) = \frac{e^{-x}}{2}.$$

3. Para cada una de las siguientes funciones de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$, determine su imagen y si es inyectiva o sobreyectiva:

$$f(x) = |e^x - 2|, \quad g(x) = x^3 + 1, \quad h(x) = \log(x^2 + 1).$$

4. Explique razonadamente si el conjunto de todos los puntos en el plano que satisfacen la ecuación:

$$(a) \ y^2 = x^2; \quad (b) \ x^2 + y^2 = 1; \quad (c) \ y^3 = x$$

es la gráfica de una función $y = f(x)$ o no.

5. Decida razonadamente si es par o impar cada una de las siguientes funciones:

$$f(x) = x^5 - 3x; \quad g(x) = \cos(\pi x); \quad h(x) = |x^3| + 5; \quad u(x) = \sqrt{x^2 - 4}.$$

6. Determine, cuando sea posible, las funciones compuestas $f \circ g$ y $g \circ f$, donde

$$(a) \ f(x) = \sin x, \ g(x) = 1 - x^2; \quad (b) \ f(x) = e^{3x}, \ g(x) = \ln x; \quad (c) \ f(x) = x^2, \ g(x) = \sqrt{x}$$

y estudie los dominios de cada composición.

7. Compruébese formalmente (o bien utilizando las sucesiones o bien usando la definición formal con ϵ y δ):

$$(a) \ \lim_{x \rightarrow -3} 2x = -6; \quad (b) \ \lim_{x \rightarrow 5} \sqrt{x-4} = 1.$$

8. Calcule los siguientes límites (sin usar la regla de L'Hopital, que se verá más adelante):

$$(a) \ \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 + x + 2}{x - 1}; \quad (b) \ \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + x - 2}{x - 1}; \quad (c) \ \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x+5} - 3}{x - 4}; \quad (d) \ \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\frac{1}{x} - \frac{1}{2}}{x - 2}.$$

9. Dadas las siguientes funciones:

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{si } x > 0, \\ -x^2, & \text{si } x \leq 0, \end{cases} \quad , \quad g(x) = \begin{cases} 2e, & \text{si } x > 3, \\ e^x, & \text{si } 0 < x \leq 3, \\ -x + 1, & \text{si } x \leq 0. \end{cases}$$

Para estas funciones:

- (a) Estudie la existencia de los límites laterales en los puntos $x = 0$ y $x = 3$.
(b) Estudie la continuidad en los puntos $x = 0$ y $x = 3$.

10. Determine todos los puntos de continuidad de la función $f(x) = \begin{cases} \sqrt{|x|} \operatorname{sen} \frac{1}{x}, & \text{si } x \neq 0, \\ 0, & \text{si } x = 0, \end{cases}$

11. Defina, cuando sea posible, el valor $f(1)$ para que f sea continua en $x = 1$:

$$(a) f(x) = \frac{x-1}{|x-1|}, \quad (b) f(x) = \frac{(x-1)^2}{|x-1|}.$$

12. Halle todos los puntos de continuidad de la función $h(x) = \sqrt{-x^2 + 7x - 6}$.

13. Dé un ejemplo de una función f que no es continua en ningún punto, pero tal que $|f|$ sea continua en todos los puntos.

14. Dibuje la gráfica y estudie la continuidad de las siguientes funciones. El símbolo $[x]$ denota la parte entera de x , es decir, el mayor entero menor o igual que x (la función *suelo* en Informática):

$$a) f(x) = x - [x]; \quad b) g(x) = \sqrt{x - [x]};$$

15. Demuestre que cada una de las siguientes funciones tiene un cero en el intervalo $[0, 1]$:

$$f(x) = -x^4 + 8x - 6; \quad g(x) = e^{3x^2} - 1; \quad h(x) = \frac{x^4 - 3\sqrt{x} + 1}{x^5 + 6x + 1}.$$

16. Demuestre que la ecuación $\cos x - \frac{10x}{\pi} = -e$ tiene solución en el intervalo $(0, \pi/2)$.

17. Pruebe que, si $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ es continua, entonces existe al menos un valor $x_0 \in [0, 1]$ que queda fijo, es decir, tal que $f(x_0) = x_0$.