

Series

1. a) Para cada una de las series infinitas:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n^2 + 3}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 + (-1)^{n+1}}{n}, \quad \sum_{n=3}^{\infty} \frac{n^2}{\log(n-1)}$$

escribe los cuatro primeros términos, a_n , y las cuatro primeras sumas parciales, S_n .

- b) Escribe la fórmula más sencilla posible del término n -ésimo, a_n , de las siguientes series:

$$\frac{1}{2} + \frac{3}{4} + \frac{5}{6} + \frac{7}{8} + \frac{9}{10} + \dots, \quad 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{6} - \frac{1}{9} + \frac{1}{12} - \frac{1}{15} + \dots$$

En ambos casos, calcula las sumas parciales, S_n , para $1 \leq n \leq 5$.

2. Escribiendo las sumas parciales como sumas telescópicas, decida la convergencia de las series correspondientes y, si procede, hállese su valor.

$$a) \sum_{n=2}^{\infty} \log \frac{n}{n+1} \quad b) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+2)} \quad c) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n.$$

3. Calcular la suma de cada una de las siguientes series:

$$a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{5^n} \quad b) \sum_{n=0}^{\infty} (4 \cdot (0,1)^n + (-0,7)^n) \quad c) \sum_{n=2}^{\infty} \pi^{n/2} e^{-n},$$

justificando previamente su convergencia.

4. Utilizando el criterio del término general, comprueba que son divergentes las series

$$a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+3}{3n-1} \quad b) \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[3]{2n^3} \quad c) \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-n} \quad d) \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{\sin(n!)}{n}\right)$$

5. Decídase la convergencia de cada una de las siguientes series positivas comparandolas con la serie geométrica generalizada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$, serie convergente si y sólo si $p > 1$

$$a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + 2013} \quad b) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{20n - 13} \quad c) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{2\sqrt{n} + \sqrt{n-1}} \\ d) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n} - 1}{2013n^2 + 2014} \quad e) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 - 6}{n^3 + 1}$$

6. Estudiar si las series siguientes son convergentes utilizando el criterio del cociente:

$$a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 + 1}{n2^n} \quad b) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n}{3n+1}\right)^n \quad c) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n^2 - 1}{n^2}\right)^{n^3} \quad d) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!} \quad e) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{2^{n^2}}.$$

7. Estudiar si las series a), b) y c) del ejercicio 6 son convergentes utilizando el criterio de la raíz.

8. Estudiar para qué valores del parámetro α son convergentes las siguientes series:

$$a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}(n+1)} \quad b) \sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})^{\alpha} \quad c) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{\alpha n}}{n^2 + 1}$$

9. Estudiar si las series siguientes son convergentes utilizando el criterio de condensación diádico:

$$a) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n (\log n)^{\frac{1}{2}}} \quad b) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \log n (\log(\log n))^{\frac{3}{2}}}$$

10. Compruebe si las siguientes series convergen (absoluta o condicionalmente) o divergen:

$$\begin{array}{lll} a) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{n^2 + n - 6}{n^4 + 1} & b) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \sin(n^2) & c) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \\ d) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{n+1} & e) \sum_{n=3}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n^2 - 4}} & f) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{n^2}{e^n} \end{array}$$

11. Decidir si las siguientes afirmaciones son verdaderas (dando una pequeña explicación) o falsas (dando un contraejemplo):

a) Si $a_n > 0$ y $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge entonces $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ converge.

b) Si $a_n > 0$ y $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge entonces $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n}$ diverge.

c) Si $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ entonces $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ converge. (Obsérvese que aquí no se pide que $a_n > 0$.)

d) Si $a_n > 0$ y a_n es monótona y no está acotada entonces $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^{-n}$ converge.

e) Si $a_n > 0$ entonces $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a_n}{2a_n + 1}\right)^n$ converge.

12. Estudiar la convergencia de las siguientes series:

$$\begin{array}{lll} a) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{10^k}{k!} & b) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k 2^k} & c) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{n!}{100^n} \\ d) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\log k)^2}{k} & e) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{\log n}} & f) \sum_{k=1}^{\infty} k \left(\frac{2}{3}\right)^k \\ g) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1 + \sqrt{k}} & h) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2k + \sqrt{k}}{k^3 + 2\sqrt{k}} & i) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2}{e^k + 1} \\ j) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(n+2)!} & k) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(k!)^2}{(2k)!} & l) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{45}{1 + 100^{-n}} \\ m) \sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt[n]{n} - 1)^n & & \end{array}$$