

Sucesiones

1. Escriba los cinco primeros términos de las sucesiones cuyos términos generales son:

$$a_n = (-1)^n + 2, \quad b_n = 2^{-n+1}, \quad c_k = \frac{k-1}{k+1}.$$

2. Halle la fórmula para a_n , sabiendo que los primeros términos de la sucesión $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ son:

$$(a) 1, 4, 9, 16, 25, 36; \quad (b) 1, 3, 1, 3, 1, 3; \quad (c) \frac{1}{2}, \frac{1}{6}, \frac{1}{24}, \frac{1}{120}, \frac{1}{720}; \quad (d) 1, -\frac{2}{3}, \frac{4}{9}, -\frac{8}{27}, \frac{16}{81}.$$

3. ¿Cuáles de las sucesiones cuyos términos generales vienen escritos más abajo son convergentes? Explique la respuesta usando la definición.

$$a_n = \frac{1}{2^n}; \quad b_n = \sqrt{n}; \quad c_n = 3 + (-1)^n.$$

4. Compruebe que las siguientes sucesiones divergen. Estudie si tienden a $+\infty$ o $-\infty$, o si son “alternadas”.

$$a_n = \frac{n^3}{10n^2 + 2009}; \quad b_n = -n^2; \quad c_n = \frac{1 + (-1)^n}{3 - (-1)^n}; \quad d_n = (-2)^n.$$

5. Calcule los siguientes límites y explique la respuesta:

$$(a) \lim_{n \rightarrow \infty} 0, 2011^n; \quad (b) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-5)^n}{12^{n+1}}; \quad (c) \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{e}{\pi}\right)^k; \quad (d) \lim_{k \rightarrow \infty} e^{1/(k+1)}.$$

6. Aplicando lema del sandwich, deduzca la existencia y halle el valor de los siguientes límites:

$$(a) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n!}; \quad (b) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 \cos(3n) + 5 \sin(n^2)}{n+1}; \quad (c) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-1)^{n+1} + 2^{-n} + \cos(n!)}{\sqrt{n}}.$$

7. Estudie si los términos generales que se indican dan lugar a sucesiones convergentes y, en caso afirmativo, halle su límite.

$$\begin{array}{lll} a) a_n = \frac{3n^4 - 2}{n^4 + 2n^2 + 2}, & b) a_n = \frac{8n^2 - 7n}{2n^3 + 5}, & c) a_n = \sqrt{n^2 + 1} - n, \\ d) a_n = n\sqrt{n^2 + 1} - n^2, & e) a_n = \frac{4^n}{5^n + 6^n}, & f) a_n = \frac{6^n}{5^n + (-6)^n}, \end{array}$$

8. Determine los siguientes límites:

$$\begin{array}{lll} (a) \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{2n^3} & (b) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt[n]{\frac{3}{2}} + \pi^{-1/n} \right) & (c) \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt[n]{e} + e^{-n}) \\ (d) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n+1} \right)^n & (e) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+1}{n+2} \right)^{2n} & (f) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2} \right)^n \end{array}$$

(Sugerencia: para los tres últimos, conviene recordar que $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n = e$).

9. En cada apartado, dé un ejemplo de una sucesión que tenga las propiedades que se afirman:

- a) La sucesión $\{|a_n|\}_{n \in \mathbb{N}}$ es monótona y acotada, pero $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ no converge.
- b) La sucesión $\{b_{n+1}/b_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge, pero $\{b_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ no converge.

10. Sean $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ y $\{b_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ dos sucesiones acotadas superiormente y A y B sus respectivos supremos. Consideremos también $\{c_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ definida por $c_n = a_n + b_n$ y llamemos C a su supremo.

- a) ¿Se cumple siempre $A + B \geq C$?
- b) ¿Se cumple $A + B = C$ si $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ y $\{b_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ son crecientes?
- c) ¿Se cumple siempre $A + B = C$?

11. Consideremos la sucesión definida por $a_{n+1} = \sqrt{2a_n}$ para cada $n \geq 1$, con $a_1 = 1$.

- a) Pruebe por inducción que $a_n < 2$ para todo n .
- b) Justifique que la sucesión $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es monótona creciente y halle su límite.
- c) Una forma alternativa de resolver los apartados anteriores es calcular una fórmula exacta para a_n . Intente hallarla.

(Este ejercicio da sentido a la expresión $\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}\dots}}$, que formalmente es el resultado de iterar indefinidamente la sucesión antes indicada, y por tanto se le debe asignar el valor de su límite.)

12. Fijado $1 < t \leq 4$, consideramos la sucesión recurrente dada por

$$a_1 = 2, \quad a_{n+1} = \frac{1}{2} \left(a_n + \frac{t}{a_n} \right) \quad \text{para } n \geq 1.$$

- a) Pruebe que esta sucesión es monótona decreciente y está acotada inferiormente por $\sqrt{t}$ y superiormente por 2. *Indicación:* $(a+b)^2 \geq 4ab$ para $a, b \geq 0$.
- b) Demuestre que $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \sqrt{t}$.

13. Sea $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ la sucesión de números reales definida por

$$a_n = \sqrt[n]{2^n + 5^n}.$$

Decide si $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es convergente. En caso afirmativo, calcular .

14. La sucesión $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ viene definida de forma recurrente como sigue:

$$a_1 = 1, \quad a_{n+1} = 3 - \frac{1}{a_n} \quad \text{para cada } n \geq 1.$$

- (a) Demuestre que $1 \leq a_n < 3$ para todo $n \geq 1$.
- (b) Demuestre que la sucesión $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es creciente.
- (c) Deduzca que la sucesión $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ tiene límite $L \in \mathbb{R}$ y calcule su valor.

15. La sucesión $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ viene definida de forma recurrente como sigue:

$$a_1 = \frac{3}{2}, \quad a_{n+1} = \frac{1}{2} + \frac{a_n}{3} \quad \text{para cada } n \geq 1.$$

Determina si la sucesión $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ tiene límite. En caso afirmativo, calcula $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \in \mathbb{R}$.