

Números reales.

1.- Sean a, b dos números no negativos, con $a \leq b$. Demostrar que

$$a \leq \sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2} \leq b.$$

2.- Indique los valores $x \in \mathbb{R}$ para los que se satisfacen las siguientes *igualdades*:

a) $x^2 - 9x + 20 = 0$,

b) $x^2 + 2x = 1$,

c) $x^4 - 4 = 0$,

d) $\sqrt[3]{1+x} = 2$,

e) $-1 + \sin x = 0$,

f) $-1 + \log \frac{x}{e} = 0$.

3.- Encuentre todos los valores $x \in \mathbb{R}$ que satisfagan las siguientes *desigualdades*:

a) $|4x + 3| \leq 1$,

b) $|x + 1| \leq |x - 1|$,

c) $|x^2 - 5x + 6| < 2$,

d) $|x + 1| + |x + 3| < 5$,

e) $\frac{x-1}{(x+2)(x-3)} > 0$,

f) $\frac{x^2-2}{x^2-4} \leq 0$,

g) $\frac{x^2+4}{x^2-2x} > 0$,

h) $\sqrt{x^2 - 6x + 9} < 1$.

4.- Indicar en la recta real todos los valores de x que satisfacen las siguientes condiciones:

(a) $|x + 1| > 3$,

(f) $\frac{x^2}{x^2-4} < 0$,

(b) $|2x + 1| < 1$,

(g) $\frac{x-1}{x+2} > 0$,

(c) $|x - 1| \leq |x + 1|$,

(h) $|(x - 2)(x - 3)| < 1$,

(d) $x^2 - 4x + 6 < x$,

(i) $|x - 1| + |x - 2| > 1$,

(e) $|x^2 - 3| \leq 1$,

(j) $\frac{|x+1|}{|x-1|} \geq 1$.

5.- Encontrar el supremo y el ínfimo de los siguientes conjuntos de números reales. ¿Son máximo o mínimo en algún caso?

(a) $A = \{x \mid x^2 < 4\}$,

(e) $E = \{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\}$,

(b) $B = \{x \mid x^2 \geq 4\}$,

(f) $F = E \cup \{0\}$,

(c) $C = \{x \mid 2 < x^2 \leq 4\}$,

(g) $G = \{\frac{1}{n} - (-1)^n \mid n \in \mathbb{N}\}$,

(d) $D = \{\frac{n-1}{n} \mid n = 1, 2, 3, \dots\}$,

(h) $H = \{x \in \mathbb{Q} \mid x > 0, x^2 \leq 3\}$.

6.- Si el conjunto A tiene supremo, ¿qué podemos decir sobre $-A = \{-x : x \in A\}$?

7.- Sean A y B dos subconjuntos no vacíos de números reales tales que $a < b$ para todo $a \in A$ y $b \in B$. Demostrar que existen $\sup A$, $\inf B$, y que además, $\sup A \leq \inf B$. Dar un ejemplo donde estos dos valores coincidan.

8.- ¿Dónde está el fallo en los siguientes razonamientos?

(a) Sea $x = y$, entonces $x^2 = xy$ y $x^2 - y^2 = xy - y^2$. Así, $(x + y)(x - y) = y(x - y)$, es decir, $x + y = y$. De aquí se sigue que $2y = y$ y por lo tanto $2 = 1$. **¡Contradicción!**

(b) Vamos a hallar los x que verifican

$$\frac{x+1}{x-1} \geq 1.$$

Esta desigualdad es equivalente a $x + 1 \geq x - 1$, o lo que es lo mismo $1 \geq -1$. Como esto es cierto para todo $x \in \mathbb{R}$, se sigue que el conjunto de valores que verifican la desigualdad anterior es $\mathbb{R}$. De esta forma, tomando en particular $x = -1$ obtenemos

$$0 = \frac{-1+1}{-1-1} \geq 1. \quad \textbf{¡Contradicción!}$$