

Inducción. Conjuntos y Funciones

1.- Demostrar por inducción:

- (a) $1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.
- (b) $1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = (1 + 2 + \dots + n)^2$.
- (c) $\forall n \geq 10, 2^n \geq n^3$.
- (d) $x^{2n} - y^{2n}$ es divisible por $x + y$.
- (e) $4(1 + 5 + 5^2 + \dots + 5^n) + 1 = 5^{n+1}$.
- (f) $\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{n+n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n}$.
- (g) Si n no es múltiplo de 4 la suma $1^n + 2^n + 3^n + 4^n$ es múltiplo de 10.
(Comprobarlo para $n = 1, 2, 3$ y demostrar que si es cierto para n , lo es para $n + 4$.)
- (h) $1 + 1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + 3 \cdot 3! + \dots + (n-1)(n-1)! = n!$ para $n \geq 2$.

2.- Demostrar la desigualdad de Bernoulli

$$(1+x)^n \geq 1+nx, \quad \text{para } x \geq -1.$$

3.- Sean $S = \{1, 2, 3, 4, 5\}, T = \{3, 4, 5, 7, 8, 9\}, U = \{1, 2, 3, 4, 9\}, V = \{2, 4, 6, 8\}$. Calcular:

- (a) $S \cap U$.
- (b) $(S \cap T) \cup U$.
- (c) $(S \cup U) \cap V$.
- (d) $(S \cup V) \setminus U$.
- (e) $(U \cup V \cup T) \setminus S$.
- (f) $(S \cup V) \setminus (T \cap U)$.
- (g) $S \times T$.
- (h) $(S \times V) \setminus (T \times U)$.
- (i) $(S \setminus T) \times (V \setminus U)$.

4.- Para cada número natural n , sea $A_n = [-\frac{2}{n+1}, \frac{4n-1}{3n}] \subset \mathbb{R}$. Determinar

$$\bigcap_{n=1}^7 A_n, \quad \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \quad \text{y} \quad \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n.$$

5.- Sean A, B, C conjuntos dados tales que $B \subset A$. Se pide describir en cada caso los conjuntos X que satisfacen las siguientes condiciones:

- (a) $A \cap X = B$ y $A \cup X = C$, si sabemos que $A \subset C$.
- (b) $A \setminus X = B$ y $X \setminus A = C$, si sabemos que $A \cap C = \emptyset$.

6.- ¿Cuáles de las siguientes funciones son inyectivas? ¿Cuáles sobreyectivas? ¿Es alguna de ellas biyectiva? (Comenzar comprobando que todas ellas son funciones y que lo son entre los conjuntos que se indican).

- (a) $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}, \quad f(m) = m + 2.$
- (b) $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}, \quad f(m) = 2m - 7.$
- (c) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = x - x^3.$
- (d) $f : \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}, \quad f(x) = x^2 + 4x.$
- (e) $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}, \quad f(n) = n(n + 1).$
- (f) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \sqrt{x^2 + 1}.$
- (g) $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{N}, \quad f(n) = n^2 + n + 1.$
- (h) $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Q}, \quad f(t) = t/(t + 1).$

7.- Sean $f, g : \mathbb{N} \setminus \{1\} \rightarrow \mathbb{P} = \{\text{números primos}\}$ las funciones definidas por
 $f(n) = \text{el mayor primo que divide a } n$
 $g(n) = \text{el menor primo que divide a } n.$

- (a) Decidir si son inyectivas y/o sobreyectivas.
- (b) ¿Quién es $f^{-1}(\{3\})$? ¿Quién es $g^{-1}(\{3\})$?

8.- Sean $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ las funciones definidas por:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \leq 1, \\ 1 - x^2 & \text{si } x > 1, \end{cases} \quad g(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x < 0, \\ (x - 1)^2 & \text{si } x \geq 0. \end{cases}$$

- (a) Dibujar los gráficos de las funciones f , g , $g \circ f$ y $f \circ g$.
- (b) Encontrar las imágenes de cada una de las cuatro funciones anteriores y decidir si son inyectivas y/o sobreyectivas.

9.- Dadas funciones $f : X \rightarrow Y$, $g : Y \rightarrow Z$, probar las siguientes afirmaciones:

- (a) f inyectiva y g inyectiva $\Rightarrow g \circ f$ inyectiva.
- (b) f sobre y g sobre $\Rightarrow g \circ f$ sobre.
- (c) Si falta alguna de las dos hipótesis en los casos anteriores, la conclusión puede ser falsa.
- (d) Si $g \circ f$ es sobreyectiva, entonces g es sobreyectiva. Si $g \circ f$ es inyectiva, entonces f es inyectiva.
- (e) Si g es biyectiva, $g \circ f$ es inyectiva si y sólo si lo es f , y es sobre si y sólo si lo es f .
- (f) Si además $X = Z$, la afirmación del apartado anterior también es cierta para $f \circ g$.

10.- Si existe, encuentra la inversa de las siguientes funciones. Si no existe, demuéstralo. Recuerda que $\sqrt{x}$ es el número $y \geq 0$ que cumple que $y^2 = x$.

- (a) $f : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty), \quad f(x) = x^3.$
- (b) $f : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty), \quad f(x) = x^2.$
- (c) $f : [-\infty, 0) \rightarrow [0, \infty), \quad f(x) = x^2.$
- (d) $f : [0, \infty) \rightarrow (-\infty, 0], \quad f(x) = -x^2.$
- (e) $f : [-\infty, 0) \rightarrow (-\infty, 0], \quad f(x) = -x^2.$