

APELLIDOS, NOMBRE: _____

1	2	3	4	5	6	7	FINAL
10	10	10	20	20	10	10	90

Razonar debidamente las respuestas

1. La sucesión $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ viene definida de forma recurrente como sigue:

$$a_1 = \frac{3}{2}, \quad a_{n+1} = \frac{1}{2} + \frac{a_n}{3} \quad \text{para cada } n \geq 1.$$

Determina si la sucesión $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ tiene límite. En caso afirmativo, calcula $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \in \mathbb{R}$.

2. Decida razonadamente si la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1 + e^n}$$

diverge, converge condicionalmente o converge absolutamente.

3. Calcule razonadamente el siguiente límite

$$\lim_{x \rightarrow 0} 3 \frac{x - \int_0^x e^{-t^2} dt}{x^3}.$$

4. Sea la función

$$f(x) = \begin{cases} 1 + x + x^2 & x \leq 0, \\ e^x & x > 0. \end{cases}$$

Determine razonadamente:

- El dominio de f .
- La continuidad de f en su dominio.
- Calcula $f'(x_0)$ para aquellos valores x_0 en los que f sea derivable.
- Calcula $f''(x_0)$ para aquellos valores x_0 en los que f sea derivable dos veces.
- La recta tangente a la curva $y = f(x)$ en el punto $(0, 1)$.
- El polinomio de Taylor de grado 3 de $f(x)$ alrededor de $x_0 = 0$.

(continua en la siguiente página)

5. Sea la función

$$f(x) = \frac{x^2}{x^2 + x - 2}.$$

Determine razonadamente:

- El dominio de f .
 - Estudia su continuidad.
 - Asíntotas.
 - Intervalos de crecimiento y decrecimiento.
 - Los máximos y mínimos locales de f .
 - Los máximos y mínimos absolutos de f .
 - Esboza la gráfica de f .
-

6. Dado el polinomio $f(x) = -x^3 + 2x^2 + 3$. Determine razonadamente:

- El número de raíces en \mathbb{R} .
 - Para cada $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $f(\alpha) = 0$, un intervalo acotado $I = (a, b) \subset \mathbb{R}$ tal que $\alpha \in I$.
-

7. Calcular la integral indefinida

$$\int \frac{1}{\cos(x)\tan(x) + 1} dx$$
