

APELLIDOS, NOMBRE: _____

1	2	3	4	5	6	7	FINAL
10	10	10	10	20	10	10	80

Razonar debidamente las respuestas

1. La sucesión $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ viene definida de forma recurrente como sigue:

$$a_1 = 1, \quad a_{n+1} = 3 - \frac{1}{a_n} \quad \text{para cada } n \geq 1.$$

- (a) Demuestre que $1 \leq a_n < 3$ para todo $n \geq 1$.
- (b) Demuestre que la sucesión $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es creciente.
- (c) Deduzca que la sucesión $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ tiene límite $L \in \mathbb{R}$ y calcule su valor.

2. Decida razonadamente si la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n \log n}$$

diverge, converge condicionalmente o converge absolutamente.

3. Calcule razonadamente los siguientes límites

$$(a) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n-1}{n+1} \right)^n \qquad (b) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen}(\operatorname{sen} x)}{\arctan x}.$$

4. Sea la función

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\cos(x) - 1}{x^2} & x \neq 0, \\ \frac{-1}{2} & x = 0. \end{cases}$$

Determine razonadamente:

- El dominio de f .
- La continuidad de f en su dominio.
- Calcule $f'(x)$.
- El polinomio de Taylor de grado 1 de $f(x)$ alrededor de $x_0 = 0$.
- La recta tangente a la curva $y = f(x)$ en el punto $(0, -\frac{1}{2})$.

(continua en la siguiente página)

5. Sea la función

$$f(x) = \frac{e^x}{x}.$$

Determine razonadamente:

- El dominio de f .
 - Asíntotas.
 - Intervalos de crecimiento y decrecimiento.
 - Los máximos y mínimos locales de f .
 - Los máximos y mínimos absolutos de f .
 - Intervalos de concavidad y convexidad.
 - Dibuje la gráfica de f .
-

6. Se define la función $F : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ como

$$F(x) = \int_0^{1-x^2} e^{t^2} dt.$$

Determine razonadamente la gráfica de $F(x)$ incluyendo:

- Intervalos de crecimiento y decrecimiento.
 - Extremos locales y absolutos de F .
 - Intervalos de concavidad y convexidad.
-

7. Calcular la integral indefinida

$$\int \frac{1}{\operatorname{sen}(x) + 1} dx$$
