

APELLIDOS, NOMBRE: _____

1	2	3	4	5	6	FINAL
10	10	10	15	20	15	80

Razonar debidamente las respuestas

1. Demostrar que para $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, se tiene la igualdad:

$$\left(1 - \frac{1}{4}\right) \left(1 - \frac{1}{9}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) = \frac{n+1}{2n}.$$

2. Expresa el conjunto $S = \{x \in \mathbb{R} \mid |x^2 - 5x + 2| \leq 2\}$ como unión de intervalos en $\mathbb{R}$.

3. Sea $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ la sucesión de números reales definida por

$$a_n = \sqrt[n]{2^n + 5^n}.$$

Decide si $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es convergente. En caso afirmativo, calcular $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$.

4. Dada la sucesión definida de forma recursiva como

$$a_1 = 1, \quad a_{n+1} = \frac{2}{3}(a_n + 2), \quad n \geq 1.$$

- a) Demuestre que $a_n \leq 4$ para todo $n \in \mathbb{N}$.
b) Demuestre que $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión monótona creciente.
c) Decide si $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es convergente. En caso afirmativo, calcular $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$.

5. Estudie razonadamente la convergencia de las series

$$(a) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1001 + \cos^5(n^2 + n + 1)}{3^n + n^2/2} \qquad (b) \quad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(\log n)^3}{n^5}$$

Justifica adecuadamente su respuesta, nombrando o enunciando los criterios aplicados.

6. Decida si la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\pi \cdot n + e}$$

converge absoluta o condicionalmente o diverge. Justifica adecuadamente su respuesta, nombrando o enunciando los criterios aplicados.
