

Integración

1. Calcule las siguientes primitivas:

$$\begin{array}{ll}
 a) \int (x^2 + 3x) \left(5x^3 - \frac{8}{x^3} \right) dx & b) \int \left(e^x(e^x - e^{-x}) + \frac{1}{5x-2} \right) dx \\
 c) \int \left(3 \operatorname{sen}(5x) - \frac{x}{2} - \frac{5}{1+4x^2} \right) dx & d) \int \left(\frac{x}{1+x^2} + \frac{2}{(4x+1)^2} + \frac{4}{\sqrt{1-2x^2}} \right) dx
 \end{array}$$

(Nota: pueden usarse las fórmulas $\int \frac{1}{x^2+a^2} dx = \frac{1}{a} \arctan(x/a) + C$; $\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin(x/a) + C$).

2. Calcule las siguientes primitivas (integrando por partes):

$$a) \int (x^2 - 2x)e^{-5x+3} dx, \quad b) \int x \cos(5x) dx, \quad c) \int e^{-x} \operatorname{sen} x dx, \quad d) \int x\sqrt{x+1} dx.$$

3. Usando la fórmula $\operatorname{sen}^2 x = 1 - \cos^2 x$, calcule $I = \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^3 x dx$ y $J = \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^7 x dx$.

4. Calcule las siguientes primitivas (usando el método de las fracciones simples):

$$\int \frac{x}{(x+1)(x-3)} dx, \quad \int \frac{x^3+1}{x^3+x} dx, \quad \int \frac{2}{(x-1)(x+3)^2} dx, \quad \int \frac{5x^2+5}{(x^2-1)(x^2+2x+2)} dx.$$

5. Halle $f'(x)$ si

$$a) f(x) = \int_0^x (1+t^2)^{-2} dt, \quad b) f(x) = \int_0^{x^2} (1+t^2)^{-3} dt, \quad c) f(x) = \int_{x^3}^{x^2} (1+t^2)^{-3} dt$$

6. Compruebe que

$$\int_0^x |t| dt = \frac{1}{2}x|x| \quad \text{para todo } x \in \mathbb{R}.$$

7. Supongamos que f es una función derivable en todo x y que satisface la ecuación

$$\int_0^x f(t) dt = -\frac{1}{2} + x^2 + x \operatorname{sen}(2x) + \frac{1}{2} \cos(2x) \quad \text{para todo } x \geq 0.$$

Calcule $f(\pi/4)$ y $f'(\pi/4)$.

8. Calcule $\int_0^1 f(x) dx$, con $f(x)$ igual a:

$$a) \frac{1}{e^x + 4e^{-x}}, \quad b) \frac{e^{2x}}{\sqrt{e^x + 1}}, \quad c) \frac{4^x + 1}{2^x + 1}, \quad d) \frac{x}{\sqrt{1+x^4}}.$$

(Nota: puede usar que $\int dx/\sqrt{x^2+1} = \ln(x + \sqrt{x^2+1}) + K$).

9. Calcule $\int_0^{\pi/4} f(x) dx$, con $f(x)$ igual a:

$$a) \operatorname{tg} x \quad b) \cos^4 x \quad c) \operatorname{tg}^2 x \quad d) \operatorname{sen}^5 x \cos^3 x$$

10. Calcule el área de la región limitada por

- el eje X y la gráfica de $f(x) = \operatorname{sen} x$ en el intervalo $[0, 8\pi]$;
- el intervalo $[0, \pi]$ del eje X y la gráfica de la función $f(x) = \lfloor x \rfloor$ (la función “parte entera”, o “suelo”).

11. Halle el área de la región limitada por las gráficas de los pares de funciones que se indican:

$$a) f(x) = \frac{2}{4x^2 + 1} \quad \text{y} \quad g(x) = 2|x|,$$

$$b) f(x) = x(e^x + 1) \quad \text{y} \quad g(x) = x + x^2e^x,$$

12. Dada $f(x) = x^2 - 2x + 7$, consideremos el triángulo curvilíneo T limitado entre las tangentes en $x = 0$ y $x = 2$ y la gráfica de f . Halle el área de T .

13. Halle el área de la región acotada por la curva $y^2 = 3x$ y la recta $2y - 2x + 3 = 0$.

14. Dados $a, b \in \mathbb{R}^+$, calcule el área de la elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

15. Calcule las siguientes integrales impropias:

$$a) \int_0^{\infty} e^{-5x} dx, \quad b) \int_0^1 \ln x dx, \quad c) \int_0^{\pi/2} \frac{1}{\cos^2 x} dx.$$

16. Estudie la convergencia de las siguientes series mediante el criterio de la integral:

$$a) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \log^2 n}, \quad b) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \log n}, \quad c) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + 1},$$